Archiv für Elektrotechnik

36. Band 2. Heft 1942

Die Theorie ungleichförmiger Leitungen

Von

Karl Willy Wagner VDE, Berlin

(Eingegangen am 19. 11. 1941)

DK 621.392

Übersicht. Mit der Ausbreitung von elektrischen Spannungen und Strömen auf Leitungen, deren Eigenschaften von Punkt zu Punkt veränderlich sind, hat sich meines Wissens zuerst Oliver Heaviside befaßt[1]). Ein verwandtes optisches Problem wurde von J. Wallot[2]) behandelt. Neuere Arbeiten beschäftigen sich mit Sonderfragen; so M. Didlaukis und H. Kaden[3]) und G. Zin[4]) mit dem Einfluß von Ungleichförmigkeiten, Ch. R. Burrows[5]) und H. A. Wheeler[6]) mit der Theorie und Anwendung der sogenannten Exponentialleitung; G. Eckart[7]) mit der Vierpoltheorie inhomogener Leitungen.

In der vorliegenden Arbeit wird die Theorie der inhomogenen Leitung entwickelt, die an ihren Enden mit beliebigen Stromnetzen verbunden ist. Es werden die erzwungenen Schwingungen, ferner die Normalfunktionen und Eigenschwingungen bestimmt und die Amplituden berechnet, die sich unter der Voraussetzung eines beliebigen Anfangszustandes auf der Leitung und in den angeschlossenen Stromkreisen ergeben. Am zahlenmäßig durchgerechneten Beispiel einer Besselschen Leitung wird die Anwendung des allgemeinen Berechnungsverfahrens erläutert. Als weitere Anwendung wird die Theorie der Potenzleitungen und der Exponentialleitungen behandelt.

1. Die Differentialgleichungen

Für die ungleichförmige Leitung sollen formal dieselben Differentialgleichungen gelten wie für die homogene Leitung, nämlich

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial x} &= R I + L \frac{\partial I}{\partial t}, \\ -\frac{\partial I}{\partial x} &= G V + C \frac{\partial V}{\partial t}. \end{aligned}\right| \qquad (1)$$

Die Koordinate x bestimmt den Ort auf der Leitung; $x = 0$ sei der Leitungsanfang, $x = l$ das Leitungsende. t ist die Zeit; V bedeutet die Spannung zwischen Hin- und Rückleitung, I den Strom in der Hinleitung, beide am Ort x und zur Zeit t. Zum Unterschied von der homogenen Leitung sind Widerstand R, Induktivität L Ableitung G und Kapazität C keine Festwerte, sondern Ortsfunktionen:

$$R = R(x), \quad L = L(x), \quad G = G(x), \quad C = C(x).$$

Der Ansatz (1) enthält ebenso wie der gleichartige Ansatz für die homogene Leitung die Voraussetzung, daß das elektromagnetische Feld der Leitung im wesent-

[1]) O. Heaviside, Electrical Papers, Bd. I, S. 141 ff. (Allgemeine Theorie); Electromagn. Theory, Bd. II, S. 211 (Anwendung auf das induktionslose Kabel).

[2]) J. Wallot, Der senkrechte Durchgang elektromagnetischer Wellen durch eine Schicht räumlich veränderlicher Dielektrizitätskonstante. Ann. Phys., Lpz. (IV) 60 (1919) S. 734. Dort findet man auch Hinweise auf weitere ältere Arbeiten.

[3]) M. Didlaukis u. H. Kaden, Die inneren Ungleichmäßigkeiten von koaxialen Breitbandkabeln. Elektr. Nachr.-Techn. 14 (1937) S. 13.

[4]) G. Zin, Sulla deformazione dei segnali nei cavi irregolori. Rendiconti di Matematica, Ser. VI, 2 (1941) S. 33.

[5]) Ch. R. Burrows, The exponential transmission line. Bell Syst. techn. J. 17 (1938) S. 555.

[6]) H. A. Wheeler, Transmission lines with exponential taper. Proc. Inst. Radio Engrs., N. Y. 27 (1939) S. 65.

[7]) G. Eckart, Reaktanz- und Vierpoltheorie inhomogener idealer Leitungen. Hochfrequenztechn. 55 (1940) S. 173.

lichen transversal ist; diese Voraussetzung gilt nur für diejenigen Frequenzkomponenten, deren Wellenlänge groß im Verhältnis zum Drahtabstand ist. Bei der ungleichförmigen Leitung kommt noch die weitere Voraussetzung hinzu, daß auf einer Strecke, die mit dem Drahtabstand vergleichbar ist, auch die relativen Änderungen der Leitungseigenschaften R, L, G, C nur klein sein dürfen. Wir nehmen an, daß diese Voraussetzungen erfüllt seien.

Auf den meisten praktisch verwendeten Leitungen sind die Verlustgrößen R und G so klein, daß man in erster Näherung die räumliche Verteilung der Spannungen und Ströme so berechnen kann, als ob R und G gleich Null wären. Eine bessere Näherung, vor allem auch für den zeitlichen Ablauf der Vorgänge, ergibt die Annahme, daß

$$R(x) = \varrho_1 L(x); \qquad G(x) = \varrho_2 C(x) \tag{2}$$

sei, wobei ϱ_1 und ϱ_2 Festwerte sind, deren Kehrwerte man als die magnetische bzw. dielektrische Zeitkonstante der Leitung bezeichnen kann. Auch wenn die Beziehungen (2) nicht in Strenge erfüllt sind, kann man mit ihnen rechnen und erhält praktisch brauchbare Dämpfungswerte, wenn man für ϱ_1 und ϱ_2 die räumlichen Mittelwerte der tatsächlichen, von Punkt zu Punkt veränderlichen Größen einsetzt. Dies soll im folgenden geschehen, weil sich dadurch eine bedeutende Vereinfachung der Rechnung ergibt. Im übrigen wird hinsichtlich der Größen $L(x)$ und $C(x)$ nur vorausgesetzt, daß diese Funktionen überall positiv sind und nirgends verschwinden, wie es ihrer physikalischen Bedeutung entspricht.

Ein zweckmäßiger Ansatz zur Lösung der Gl. (1) ist

$$\left.\begin{aligned} V &= (p + \varrho_1)\, \varphi(x)\, e^{pt}, \\ I &= -\frac{1}{L}\varphi'(x)\, e^{pt} = \psi(x)\, e^{pt}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Mittels der Exponentialfunktion e^{pt} können wir nicht nur den eingeschwungenen (periodischen) Zustand bei der Kreisfrequenz ω darstellen, indem wir $p = i\,\omega$ setzen, sondern auch die freien Schwingungen unseres Systems; hierbei wird p im allgemeinen komplex; der reelle Teil von p ergibt dann die Dämpfung, der imaginäre Teil die Kreisfrequenz der freien Schwingung oder Eigenschwingung.

Der Ansatz (3) befriedigt die erste Gl. (1) [mit Gl. (2)] identisch. Damit auch die zweite Gl. (1) erfüllt sei, muß $\varphi(x)$ der Differentialgleichung

$$\frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{L}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right) = (p + \varrho_1)\,(p + \varrho_2)\,\varphi \tag{4a}$$

genügen. Für $\psi(x)$ ergibt sich die Differentialgleichung

$$\frac{1}{L}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right) = (p + \varrho_1)\,(p + \varrho_2)\,\psi. \tag{4b}$$

Die zweite Gl. (1) liefert noch die weitere Beziehung

$$\psi'(x) = -C\,(p + \varrho_1)\,(p + \varrho_2)\,\varphi(x). \tag{4c}$$

Die Differentialgleichung (4a) ist von zweiter Ordnung; sie hat demnach zwei linear unabhängige Grundlösungen $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$. Ihre allgemeine Lösung können wir daher in der Form schreiben

$$\varphi(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x). \tag{5a}$$

c_1, c_2 sind beliebige Festwerte. Auf Grund der in der zweiten Gl. (3) stehenden Beziehung zwischen $\psi(x)$ und $\varphi'(x)$ lautet die zu (5a) zugeordnete allgemeine Lösung von (4b):

$$\psi(x) = -\frac{c_1}{L}\varphi_1'(x) - \frac{c_2}{L}\varphi_2'(x). \tag{5b}$$

2. Grenzbedingungen

Der durch die Gl. (3), (5a), (5b) ausgedrückte Lösungsansatz stellt nur ein Schema dar, das den weiteren Bedingungen der Aufgabe anzupassen ist, wobei sich insbesondere die zulässigen Werte von p, c_1, c_2 ergeben müssen. Zunächst sind die Grenzbedingungen zu beachten, die durch die Verbindung der Leitung mit ihren Endschaltungen bei $x = 0$ und $x = l$ gegeben sind. Für Vorgänge, deren zeitlicher Ablauf durch die Exponentialfunktion e^{pt} vorgeschrieben ist, lassen sich die Endschaltungen durch ihre Scheinwiderstände $W_0(p)$ und $W_l(p)$ kennzeichnen; es sind rationale Funktionen von p, sofern die Endschaltungen aus einer endlichen Anzahl von Maschen bestehen, was wir annehmen wollen.

Für das Leitungsende $x = 0$ ergibt sich nach dem Vorstehenden die Grenzbedingung

$$V(0) = -W_0 I(0)$$

oder, mit Rücksicht auf (3)

$$(\varrho_1 + p)\,\varphi(0) = \frac{W_0}{L(0)}\,\varphi'(0). \tag{6a}$$

Ebenso erhält man für das Leitungsende $x = l$

$$V(l) = W(l)\,I(l)$$

und hieraus

$$(\varrho_1 + p)\,\varphi(l) = -\frac{W_l}{L(l)}\,\varphi'(l). \tag{6b}$$

Bevor wir diese Grenzbedingungen auswerten, geben wir noch die Werte der Scheinwiderstände für einige Endschaltungen an.

1. Für ein offenes Leitungsende ist

$$W = \infty. \tag{7a}$$

2. Für ein kurzgeschlossenes Ende ist

$$W = 0. \tag{7b}$$

3. Für eine Reihenschaltung, bestehend aus der Kapazität K, der Induktivität M und dem Widerstand R ist

$$W = \frac{1}{pK} + R + pM. \tag{7c}$$

4. Für eine Parallelschaltung der vorgenannten Leitungselemente ist

$$W = \frac{pRM}{R + pM + p^2 KMR}. \tag{7d}$$

5. Wenn das Leitungsende mit einem n-maschigen Netz verbunden ist, so besteht das Gleichungssystem[1])

$$\left.\begin{aligned} V &= a_{11}Q_1 + a_{12}Q_2 + \cdots + a_{1n}Q_n \\ 0 &= a_{21}Q_1 + a_{22}Q_2 + \cdots + a_{2n}Q_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 &= a_{n1}Q_1 + a_{n2}Q_2 + \cdots + a_{nn}Q_n \end{aligned}\right\} \tag{7e}$$

mit

$$a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu} = \frac{1}{K_{\mu\nu}} + p\,R_{\mu\nu} + p^2 M_{\mu\nu}. \tag{7f}$$

Q_ν ist die Ladung der ν-ten Masche; ihr Strom ist

$$I_\nu = pQ_\nu. \tag{7g}$$

[1]) Siehe z. B. K. W. Wagner, Operatorenrechnung, S. 98ff. Leipzig: Barth 1940.

Die Größen $K_{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu}$, $M_{\mu\nu}$ bedeuten bei ungleichen Zeigern die Kopplungskapazität, den Kopplungswiderstand und die Kopplungsinduktivität der ν-ten Masche mit der μ-ten; bei gleichen Zeigern sind es Kapazität, Widerstand und Induktivität der ν-ten Masche selbst.

Löst man das Gleichungssystem nach $Q_1 = I_1/p$ auf, so erhält man

$$p V D_{11} = D I_1. \tag{7h}$$

D ist die Determinante des Gleichungssystems; D_{11} ist der zum Koeffizienten a_{11} gehörige Minor. Aus der letzten Gleichung folgt der Scheinwiderstand des Netzes

$$W = \frac{V}{I_1} = \frac{D}{p D_{11}}. \tag{7i}$$

3. Normalfunktionen und Eigenwerte. Normalvorgänge

Man muß nun in die Grenzbedingungen (6a) und (6b) für φ und φ' die Ausdrücke einsetzen, die sich aus Gl. (5a) mit $x = 0$ bzw. $x = l$ ergeben. Dadurch gewinnt man die beiden folgenden Gleichungen

$$(\varrho_1 + p)\,[c_1 \varphi_1(0) + c_2 \varphi_2(0)] = \frac{W_0}{L(0)}\,[c_1 \varphi_1'(0) + c_2 \varphi_2'(0)],$$

$$(\varrho_1 + p)\,[c_1 \varphi_1(l) + c_2 \varphi_2(l)] = -\frac{W_l}{L(l)}\,[c_1 \varphi_1'(l) + c_2 \varphi_2'(l)].$$

Aus beiden Gleichungen kann man das Verhältnis c_2/c_1 ausrechnen; die beiden Werte müssen gleich sein; es ergibt sich

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{(\varrho_1+p)\,\varphi_1(0) - \frac{W_0}{L(0)}\varphi_1'(0)}{-(\varrho_1+p)\,\varphi_2(0) + \frac{W_0}{L(0)}\varphi_2'(0)} = \frac{(\varrho_1+p)\,\varphi_1(l) + \frac{W_l}{L(l)}\varphi_1'(l)}{-(\varrho_1+p)\,\varphi_2(l) - \frac{W_l}{L(l)}\varphi_2'(l)}. \tag{8}$$

Dies ist eine Gleichung zur Berechnung der zulässigen Werte von p, d. h. derjenigen Werte, mit denen die Funktionen φ und φ' die Grenzbedingungen erfüllen. Die Differentialgleichung (4a) [ebenso auch (4b)] liefert zwar mit jedem beliebigen Wert p eine Lösung $\varphi(x)$, die wir daher auch als $\varphi(p, x)$ bezeichnen können, um anzudeuten, daß φ vom Parameter p abhängt. Aber nur diejenigen Werte von p, die auch die Gl. (8) erfüllen, ergeben Funktionen $\varphi(p)$, die den Grenzbedingungen genügen.

Gl. (8) enthält p nicht nur in dem Faktor $\varrho_1 + p$, sondern im allgemeinen auch in W_0 und W_l (s. die vorstehenden Beispiele) und endlich auch als Parameter in den Funktionen φ_1, φ_1', φ_2, φ_2'; da diese Funktionen gewöhnlich transzendente Funktionen sind, ist auch die Gl. (8) eine transzendente Gleichung. Wir schreiben sie kurz

$$S(p) = 0 \tag{8a}$$

und nennen sie die Stammgleichung unserer aus der Leitung samt ihren Endschaltungen bestehenden Anordnung.

Die Stammgleichung hat im allgemeinen unendlich viele Wurzeln; wir denken sie uns ihrer Größe nach in eine Reihe geordnet und durch Zeiger voneinander unterschieden:

$$p_1,\ p_2,\ \ldots\ p_k\ \ldots$$

Die p_k heißen die Eigenwerte der Anordnung. Sie sind im allgemeinen komplex. Schreibt man

$$p_k = -\varrho_k + \mathrm{i}\,\omega_k, \tag{8b}$$

so lehrt die Zeitfunktion

$$e^{p_k t} = e^{-\varrho_k t}\, e^{\mathrm{i}\omega_k t},$$

daß ϱ_k die Dämpfung und ω_k die Kreisfrequenz der durch den Eigenwert p_k bestimmten Eigenschwingung ist.

Wenn die Leitung als verlustlos angenommen wird ($\varrho_1 = \varrho_2 = 0$) und auch die Schaltungen an den Enden keine Widerstände enthalten, werden die p_k rein imaginär und hiermit die Eigenschwingungen ungedämpft.

Jeder Eigenwert p_k bestimmt eine mögliche Spannungsverteilung auf der Leitung durch die zugehörige Funktion φ_k und zugleich auch die entsprechende Stromverteilung durch die zugehörige Funktion ψ_k. Die genannten Funktionen enthalten auch nicht mehr zwei willkürliche Konstanten c_1 und c_2, da ja das Verhältnis c_2/c_1 nach Gl. (8) für jeden Eigenwert p_k festliegt. Es bleibt also nur noch ein Größenfaktor unbestimmt. Sieht man von diesem zunächst ab, so kann man

$$\left.\begin{aligned} \varphi_k(x) &= \varphi_{1k}(x) + c_k \varphi_{2k}(x), \\ \psi_k(x) &= -\frac{1}{L}\left[\varphi'_{1k}(x) + c_k \varphi'_{2k}(x)\right] \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

setzen, wobei

$$c_k = \left(\frac{c_2}{c_1}\right)_{p=p_k} \tag{9a}$$

ist. $\varphi_k(x)$ heißt die zum Eigenwert p_k gehörige Normalfunktion der Spannung, $\psi_k(x)$ die Normalfunktion des Stromes.

Der durch den Ansatz (3) mit einem bestimmten Eigenwert p_k beschriebene Ausgleichsvorgang heißt ein Normalvorgang. Er ist bis auf einen noch festzulegenden Größenfaktor A_k vollständig bestimmt. Diesen Faktor nennt man die Amplitude des Normalvorganges.

Zu dem Normalvorgang gehören außer den Spannungen und Strömen auf der Leitung auch noch die Ladungen und Ströme in den Endschaltungen. Fassen wir den allgemeinsten Fall eines n-maschigen Netzes ins Auge, so sind dies die Ladungen Q_ν und die Ströme I_ν, die wir für den k-ten Normalvorgang zweckmäßig in der Form

$$Q_\nu^{(k)}\, e^{p_k t}, \qquad I_\nu^{(k)}\, e^{p_k t}$$

schreiben, da sie ja auch nach dem Zeitgesetz $e^{p_k t}$ sich ändern. Ihre (relativen) Amplituden $Q_\nu^{(k)}$, $I_\nu^{(k)}$ ergeben sich aus dem im Abschnitt 2 angeschriebenen Gleichungssystem (7e) zu

$$Q_\nu^{(k)} = V^{(k)} \frac{D_{1\nu}(p_k)}{D(p_k)}; \qquad I_\nu^{(k)} = p_k Q_\nu^{(k)}. \tag{10}$$

Darin ist $D_{1\nu}$ der zum Koeffizienten $a_{1\nu}$ gehörige Minor; ferner ist

$$V^{(k)} = (p_k + \varrho_1)\,\varphi_k(0) \quad \text{bzw.} \quad (p_k + \varrho_1)\,\varphi_k(l), \tag{10a}$$

je nachdem, ob es sich um die Schaltung am Ende $x = 0$ oder $x = l$ handelt.

4. Anfangsbedingungen

Die nun noch offen gebliebene Frage, mit welcher Stärke (d. h. Amplitude) die verschiedenen Normalvorgänge im gegebenen Fall auftreten, wird durch den Anfangszustand des aus der Leitung nebst Endschaltungen bestehenden Systems entschieden. Dieser bestimmt nach dem Satz von der wechselseitigen Energie die Amplituden A_k der Normalvorgänge[1]). Die vollständige Lösung des Ausgleichsproblems lautet hiermit

$$\left.\begin{aligned} V &= \sum_k A_k (p_k + \varrho_1)\,\varphi_k(x)\, e^{p_k t}, \\ I &= -\frac{1}{L}\sum_k A_k \varphi'_k(x)\, e^{p_k t} = \sum_k A_k \psi_k(x)\, e^{p_k t}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

[1]) Dieser Satz ist in seiner allgemeinsten Form von Heaviside ausgesprochen worden (Electrical Papers, Bd. I, S. 520; Bd. II, S. 202). Eine ausführliche Darstellung hat der Verfasser in der Elektr. Nachr.-Techn. 2 (1925) S. 376 gegeben.

Die Formel zur Berechnung von A_k lautet

$$A_k = \frac{U_{0k} - T_{0k}}{2(U_k - T_k)}. \tag{12}$$

U_{0k} ist die wechselseitige elektrische, T_{0k} die wechselseitige magnetische Energie des gegebenen Anfangszustandes mit dem k-ten Normalvorgang. U_k ist die elektrische, T_k die magnetische Energie des k-ten Normalvorganges.

Zur Berechnung der wechselseitigen Energien ist der Anfangszustand sowohl auf der Leitung selbst als auch in den angeschlossenen Schaltungen zu berücksichtigen.

Auf der Leitung herrsche im Zeitpunkt $t = 0$ die Spannungsverteilung

$$(V)_{t=0} = \Phi(x) \tag{13a}$$

und die Stromverteilung

$$(I)_{t=0} = \Psi(x). \tag{13b}$$

$\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ sind willkürlich vorgeschriebene Funktionen, die nur der Beschränkung unterliegen, daß sie eine physikalisch mögliche Spannungs- bzw. Stromverteilung ergeben; sie können z. B. eine beliebige Anzahl endlicher Sprünge enthalten.

Mit diesen Anfangsfunktionen liefert die Leitung zur wechselseitigen elektrischen Energie den Beitrag

$$(U_{0k})_{\text{Leitung}} = (\varrho_1 + p_k) \int_0^l C\,\Phi(x)\,\varphi_k(x)\,\mathrm{d}x, \tag{13c}$$

zur wechselseitigen magnetischen Energie den Beitrag

$$(T_{0k})_{\text{Leitung}} = \int_0^l L\,\Psi(x)\,\psi_k(x)\,\mathrm{d}x. \tag{13d}$$

Die Beiträge der Endschaltungen zu den wechselseitigen Energien schreibt man am kürzesten in Matrizenform[1]). Es sei

$$\boldsymbol{A} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Die Matrix der Koeffizienten des Gleichungssystems (7e), das die betreffende Endschaltung kennzeichnet. Wir können hierfür nach Gl. (7f) auch

$$\boldsymbol{A}_k = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{K}} + p_k \boldsymbol{R} + p_k^2 \boldsymbol{M}$$

schreiben, wobei $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{K}}$, $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{M}$ die Matrizen der Koeffizienten $\frac{1}{K_{\mu\nu}}$, $R_{\mu\nu}$, $M_{\mu\nu}$ bedeuten und der Zeiger k angibt, daß die Matrix $\boldsymbol{A}$ für den Eigenwert p_k angeschrieben ist.

Ferner seien

$$\boldsymbol{Q}^{(k)} = \begin{Vmatrix} Q_1^{(k)} \\ Q_2^{(k)} \\ \vdots \\ Q_n^{(k)} \end{Vmatrix}, \qquad \boldsymbol{Q}^{(0)} = \begin{Vmatrix} Q_1^{(0)} \\ Q_2^{(0)} \\ \vdots \\ Q_n^{(0)} \end{Vmatrix}, \qquad \boldsymbol{I}^{(0)} = \begin{Vmatrix} I_1^{(0)} \\ I_2^{(0)} \\ \vdots \\ I_n^{(0)} \end{Vmatrix},$$

die Matrizen der Maschenladungen $Q_\nu^{(k)}$ im k-ten Normalvorgang, der Maschenladungen $Q_\nu^{(0)}$ im Anfangszustand und der Maschenströme $I_\nu^{(0)}$ im Anfangszustand. Die Größen $Q_\nu^{(0)}$ und $I_\nu^{(0)}$ des Anfangszustandes hat man sich ebenso wie die Funktionen $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ als willkürlich vorgeschrieben zu denken. Die Matrix $\boldsymbol{I}_k$ der Maschen-

[1]) Eine Übersicht über die wichtigsten Regeln der Matrizenrechnung und ihre Anwendung auf elektrische Netze gibt W. Quade in dem Aufsatz „Matrizenrechnung und elektrische Netze". Arch. Elektrotechn. 34 (1940) S. 545.

ströme $I_\nu^{(k)}$ des k-ten Normalvorganges entsteht aus $\boldsymbol{Q}^{(k)}$ einfach durch Multiplikation mit p_k [s. Gl. (7g)]. Dann ist der Beitrag der Schaltung am Leitungsanfang zur wechselseitigen elektrischen Energie durch den Ausdruck

$$U_{0k}^{(a)} = \boldsymbol{Q}^{(0)\prime} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{K}} \boldsymbol{Q}^{(k)} \tag{13e}$$

gegeben, wobei der Strich an $\boldsymbol{Q}^{(0)}$ bedeutet, daß die gestürzte Matrix

$$\boldsymbol{Q}^{(0)\prime} = \| Q_1^{(0)},\ Q_2^{(0)} \ \dots \ Q_n^{(0)} \|$$

zu nehmen ist. Für (13e) kann man übrigens auch

$$U_{0k}^{(a)} = \boldsymbol{Q}^{(k)\prime} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{K}} \boldsymbol{Q}^{(0)} \tag{13f}$$

schreiben[1]).

Denselben Ausdruck erhält man auch für die wechselseitige elektrische Energie $U_{0k}^{(e)}$ der Schaltung am Leitungsende; dabei sind natürlich die Koeffizienten und die Maschenladungen dieser Schaltung einzusetzen.

Für die wechselseitigen magnetischen Energien der Endschaltungen gelten die entsprechenden Ausdrücke

$$\left.\begin{matrix} T_{0k}^{(a)} \\ T_{0k}^{(e)} \end{matrix}\right\} = \boldsymbol{I}^{(0)\prime} \boldsymbol{M} \boldsymbol{I}^{(k)} = p_k \boldsymbol{I}^{0\prime} \boldsymbol{M} \boldsymbol{Q}^{(k)} = p_k \boldsymbol{Q}^{(k)\prime} \boldsymbol{M} \boldsymbol{I}^{(0)}. \tag{13g}$$

Wenn die Endschaltungen nicht aus vermaschten Netzen, sondern nur aus einer einfachen Reihen- oder Parallelschaltung bestehen, vereinfachen sich natürlich die Ausdrücke $U_{0k}^{(a)}$, $U_{0k}^{(e)}$, $T_{0k}^{(a)}$, $T_{0k}^{(e)}$ bedeutend. Falls die Endschaltung keine Energiespeicher enthält (z. B. offenes Ende, kurzgeschlossenes Ende oder reine Widerstandsschaltung) so verschwinden die zugehörigen wechselseitigen Energien.

Ebenso wie die wechselseitigen Energien des k-ten Normalvorganges mit dem Anfangszustand sind auch die Energien selbst des k-ten Normalvorganges zu berechnen. Ihre doppelten Werte erhält man, wenn man in den Ausdrücken der wechselseitigen Energien die Anfangswerte durch die entsprechenden Größen des k-ten Normalvorganges ersetzt. Somit wird

$$\left.\begin{aligned} 2\,(U_k)_{\text{Leitung}} &= (\varrho_1 + p_k)^2 \int_0^l C\,[\varphi_k(x)]^2\,\mathrm{d}x, \\ 2\,(T_k)_{\text{Leitung}} &= \int_0^l L\,[\psi_k(x)]^2\,\mathrm{d}x, \end{aligned}\right\} \tag{13h}$$

$$\left.\begin{matrix} 2U_k^{(a)} \\ 2U_k^{(e)} \end{matrix}\right\} = \boldsymbol{Q}^{(k)\prime} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{K}} \boldsymbol{Q}^{(k)}, \qquad \left.\begin{matrix} 2T_k^{(a)} \\ 2T_k^{(e)} \end{matrix}\right\} = p_k^2 \boldsymbol{Q}^{(k)\prime} \boldsymbol{M} \boldsymbol{Q}^{(k)}. \tag{13i}$$

Setzt man die gefundenen Ausdrücke in (12) ein, so ergibt sich die Amplitude des k-ten Normalvorganges

$$A_k = \frac{(\varrho_1 + p_k) \int_0^l C\,\Phi(x)\,\varphi_k(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^l L\,\Psi(x)\,\psi_k(x)\,\mathrm{d}x + U_{0k}^{(a)} + U_{0k}^{(e)} - T_{0k}^{(a)} - T_{0k}^{(e)}}{(\varrho_1 + p_k)^2 \int_0^l C\,[\varphi_k(x)]^2\,\mathrm{d}x - \int_0^l L\,[\psi_k(x)]^2\,\mathrm{d}x + 2U_k^{(a)} + 2U_k^{(e)} - 2T_k^{(a)} - 2T_k^{(e)}}. \tag{14}$$

Mit diesen Werten von A_k beschreiben die Gl. (11) den Verlauf des Ausgleichsvorganges auf der Leitung, der sich aus einem beliebig vorgeschriebenen Anfangszustand der Leitung mit ihren Endschaltungen

[1]) Man stoße sich nicht daran, daß in den Gl. (13e, f) links eine gewöhnliche Zahl, rechts eine Matrix steht; diese reduziert sich nämlich auf ein einziges Glied, und zwar auf das erste Glied der obersten Reihe.

ergibt. Zugleich ist auch der Verlauf des Ausgleichsvorganges in den Endschaltungen bestimmt; in der ν-ten Masche verläuft die Ladung nach dem Gesetz

$$Q_\nu = \sum_k A_k Q_\nu^{(k)} e^{p_k t}, \tag{15a}$$

der Maschenstrom nach dem Gesetz

$$I_\nu = \sum_k p_k A_k Q_\nu^{(k)} e^{p_k t}. \tag{15b}$$

Die Größen $Q_\nu^{(k)}$ sind in Gl. (10) u. (10a) angegeben.

5. Einige Integralbeziehungen

Die im Nenner der Gl. (14) auftretenden Integrale lassen sich durch die Werte der Funktionen an den Leitungsenden ausdrücken; man erspart dadurch das manchmal umständliche Ausrechnen dieser Integrale.

Wir denken uns die Differentialgleichung (4a) für einen bestimmten Eigenwert p_μ angeschrieben, multiplizieren dann beide Seiten mit $C\,\varphi_\nu(x)\,\mathrm{d}x$, wo $\varphi_\nu(x)$ die Normalfunktion zu einem andern Eigenwert p_ν bedeutet, und integrieren über die Leitung. Es ergibt sich

$$\int_0^l \varphi_\nu(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{L}\frac{\mathrm{d}\varphi_\mu(x)}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x = (p_\mu+\varrho_1)(p_\mu+\varrho_2)\int_0^l C\,\varphi_\mu(x)\,\varphi_\nu(x)\,\mathrm{d}x.$$

Wenn man auf der linken Seite nach Teilen integriert, erhält man[1])

$$(p_\mu+\varrho_1)(p_\mu+\varrho_2)\int_0^l C\,\varphi_\mu\varphi_\nu\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{L}\varphi_\nu\varphi'_\mu\right]_0^l - \int_0^l \frac{1}{L}\varphi'_\mu\varphi'_\nu\,\mathrm{d}x.$$

Ebenso ergibt sich, wenn man p_μ mit p_ν vertauscht,

$$(p_\nu+\varrho_1)(p_\nu+\varrho_2)\int_0^l C\,\varphi_\mu\varphi_\nu\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{L}\varphi_\mu\varphi'_\nu\right]_0^l - \int_0^l \frac{1}{L}\varphi'_\mu\varphi'_\nu\,\mathrm{d}x.$$

Zieht man diese Gleichung von der vorhergehenden ab, so folgt

$$\left.\begin{aligned}&[(p_\mu+\varrho_1)(p_\mu+\varrho_2)-(p_\nu+\varrho_1)(p_\nu+\varrho_2)]\int_0^l C\,\varphi_\mu\varphi_\nu\,\mathrm{d}x\\ &\quad=\left[\frac{1}{L}(\varphi_\nu\varphi'_\mu-\varphi_\mu\varphi'_\nu)\right]_0^l=[\varphi_\mu\psi_\nu-\varphi_\nu\psi_\mu]_0^l.\end{aligned}\right\} \tag{16a}$$

Wir dividieren beide Seiten durch den Faktor des Integrals und gehen dann zur Grenze $p_\mu \to p_\nu$ über; so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned}\int_0^l C\,\varphi_\mu^2\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2p_\mu+\varrho_1+\varrho_2}\left[\frac{1}{L}\left(\varphi_\mu\frac{\mathrm{d}\varphi'_\mu}{\mathrm{d}p_\mu}-\varphi'_\mu\frac{\mathrm{d}\varphi_\mu}{\mathrm{d}p_\mu}\right)\right]_0^l\\ &= \frac{1}{2p_\mu+\varrho_1+\varrho_2}\left[\psi_\mu\frac{\mathrm{d}\varphi_\mu}{\mathrm{d}p_\mu}-\varphi_\mu\frac{\mathrm{d}\psi_\mu}{\mathrm{d}p_\mu}\right]_0^l.\end{aligned}\right\} \tag{16b}$$

Eine vollkommen entsprechende Berechnung knüpfen wir an die Gl. (4b) an. Sie ergibt die folgenden Ausdrücke:

$$[(p_\mu+\varrho_1)(p_\mu+\varrho_2)-(p_\nu+\varrho_1)(p_\nu+\varrho_2)]\int_0^l L\,\psi_\mu\psi_\nu\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{C}(\psi_\nu\psi'_\mu-\psi_\mu\psi'_\nu)\right]_0^l \tag{16c}$$

und

$$\int_0^l L\,\psi_\mu^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2p_\mu+\varrho_1+\varrho_2}\left[\frac{1}{C}\left(\psi_\mu\frac{\mathrm{d}\psi'_\mu}{\mathrm{d}p_\mu}-\psi'_\mu\frac{\mathrm{d}\psi_\mu}{\mathrm{d}p_\mu}\right)\right]_0^l. \tag{16d}$$

[1]) Das Argument x lassen wir im folgenden der kürzeren Schreibung halber weg.

6. Die Besselsche Leitung

Die Anwendung unserer allgemeinen Theorie erläutern wir an dem Beispiel einer Leitung, die eine vom Anfang zum Ende hin linear zunehmende Induktivität

$$L = L_0 (1 + \lambda x) \tag{17a}$$

und eine im gleichen Verhältnis abnehmende Kapazität

$$C = C_0 \frac{1}{1+\lambda x} \tag{17b}$$

hat. L_0, C_0, λ sind gegebene Festwerte. Diese Leitung kann man eine Besselsche Leitung[1]) nennen, da, wie wir sogleich sehen werden, die räumliche Verteilung von Spannung und Strom durch Zylinderfunktionen dargestellt wird.

Mit den vorstehenden Werten von L und C nimmt die Differentialgleichung (4a) die Form an

$$\varphi'' - \frac{\lambda}{1+\lambda x} \varphi' + m^2 \varphi = 0; \tag{18}$$

dabei ist

$$-m^2 = (p + \varrho_1)(p + \varrho_2) L_0 C_0 \tag{18a}$$

gesetzt. Die Lösung von (18) läßt sich durch Zylinderfunktionen Z_1 erster Ordnung ausdrücken[2]):

$$\varphi = (1 + \lambda x) Z_1 \frac{m}{\lambda} (1 + \lambda x). \tag{18b}$$

Auf Grund der Differentialformeln

$$Z_1'(y) = Z_0(y) - \frac{1}{y} Z_1(y); \qquad Z_0'(y) = -Z_1(y)$$

kann man leicht zeigen, daß (18b) die Differentialgleichung (18) erfüllt. Ferner folgt aus (18b)

$$\varphi' = m (1 + \lambda x) Z_0 \frac{m}{\lambda} (1 + \lambda x) \tag{18c}$$

und [s. die zweite Gl. (3)]

$$\psi = -\frac{m}{L_0} Z_0 \frac{m}{\lambda} (1 + \lambda x). \tag{18d}$$

Die Zylinderfunktion Z_1 wird im allgemeinen Fall durch zwei linear unabhängige Lösungen von (18) dargestellt. Als solche kann man z. B. die Besselsche Funktion $J_1 \frac{m}{\lambda} (1 + \lambda x)$ und die Neumannsche Zylinderfunktion $N_1 \frac{m}{\lambda} (1 + \lambda x)$ nehmen und demgemäß

$$Z_1 \frac{m}{\lambda} (1 + \lambda x) = c_1 J_1 \frac{m}{\lambda} (1 + \lambda x) + c_2 N_1 \frac{m}{\lambda} (1 + \lambda x) \tag{19a}$$

setzen; entsprechend wird

$$Z_0 \frac{m}{\lambda} (1 + \lambda x) = c_1 J_0 \frac{m}{\lambda} (1 + \lambda x) + c_2 N_0 \frac{m}{\lambda} (1 + \lambda x). \tag{19b}$$

c_1, c_2 sind Festwerte, deren Verhältnis durch die Grenzbedingungen bestimmt ist (s. Abschnitt 3). Bild 1 zeigt den Verlauf der Besselschen Funktionen J_0, J_1; Bild 2

[1]) In Anlehnung an Heaviside, Electr. Theory, Bd. II, S. 211, obgleich in dem hier behandelten Falle neben den Besselschen auch die Neumannschen bzw. die Hankelschen Zylinderfunktionen auftreten.

[2]) Tafeln und die wichtigsten Formeln für diese Funktionen findet man bei E. Jahnke u. F. Emde, Funktionentafeln; 1. Aufl. 1909; 2. Aufl. 1933; 3. Aufl. 1938. Leipzig: B. G. Teubner. — Einen Überblick über die Theorie der Zylinderfunktionen geben: P. Schafheitlin, Theorie der Besselschen Funktionen. Leipzig: B. G. Teubner 1908. — R. Weyrich, Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen, B. G. Teubner 1937.

den Verlauf der Neumannschen Funktionen N_0, N_1. Diese werden im Nullpunkt unendlich groß; doch stört das hier nicht, da das Argument $\frac{m}{\lambda}(1+\lambda x)$ im Bereich $x=0$ bis $x=l$ nicht verschwindet, vorausgesetzt, daß $m \neq 0$ ist.

Statt der Besselschen und Neumannschen Zylinderfunktionen kann man auch die beiden Hankelschen Zylinderfunktionen $H^{(1)}$ und $H^{(2)}$ verwenden und

$$\left.\begin{aligned} Z_1 \tfrac{m}{\lambda}(1+\lambda x) &= \bar{c}_1 H_1^{(1)} \tfrac{m}{\lambda}(1+\lambda x) + \bar{c}_2 H_1^{(2)} \tfrac{m}{\lambda}(1+\lambda x), \\ Z_0 \tfrac{m}{\lambda}(1+\lambda x) &= \bar{c}_1 H_0^{(1)} \tfrac{m}{\lambda}(1+\lambda x) + \bar{c}_2 H_0^{(2)} \tfrac{m}{\lambda}(1+\lambda x) \end{aligned}\right\} \quad (19c)$$

setzen. Da für jede Ordnungszahl n .

$$\left.\begin{aligned} H_n^{(1)}(y) &= J_n(y) + i N_n(y), \\ H_n^{(2)}(y) &= J_n(y) - i N_n(y) \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

ist, sind die beiden Lösungsformen (19a), (19b) und (19c) identisch. Es ist eine reine Frage der Zweckmäßigkeit, ob man im gegebenen Einzelfall die eine oder andere bevorzugt.

Die Funktionen J und N sind reell, wenn das Argument reell ist. Die Hankelschen Funktionen haben für reelles Argument komplexe Werte, wie man aus (20) erkennt.

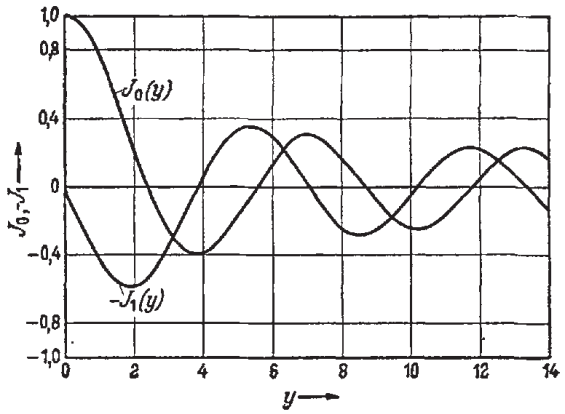

Bild 1. Die Besselschen Zylinderfunktionen $J_0(y)$ und $J_1(y)$.

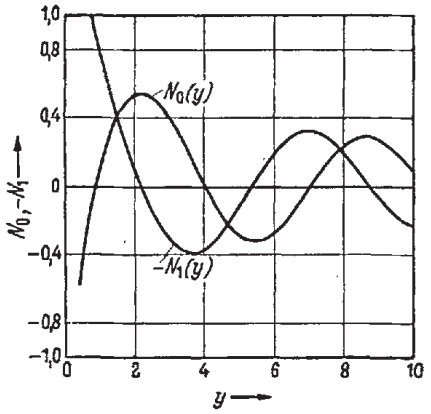

Bild 2. Die Neumannschen Zylinderfunktionen $N_0(y)$ und $N_1(y)$.

Sie haben die besondere Eigenschaft, daß jede von ihnen für komplexes Argument in einer Halbebene verschwindet, wenn man in dieser Halbebene in beliebiger Richtung ins Unendliche geht; und zwar tut dies $H^{(1)}$ in der Halbebene mit positivem Imaginärteil, $H^{(2)}$ in der Halbebene mit negativem Imaginärteil. Mathematisch ausgedrückt:

$$\left.\begin{aligned} \lim H^{(1)}(r\,e^{i\vartheta}) &= 0 \quad \text{für} \quad r \to \infty, \quad 0 < \vartheta < \pi, \\ \lim H^{(2)}(r\,e^{i\vartheta}) &= 0 \quad \text{für} \quad r \to \infty, \quad \pi < \vartheta < 2\pi. \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Auf der homogenen Leitung entspricht die Lösung (19a), (19b) der Darstellung der Spannungs- und Stromverteilung durch die trigonometrischen Funktionen cosinus und sinus. Der Lösung mit Hankelschen Funktionen entspricht auf der homogenen Leitung die bekannte Lösungsform

$$c_1 e^{+i\eta x} + c_2 e^{-i\eta x},$$

wobei $\eta = \alpha - i\beta$ ist, α die Winkelkonstante, β die Dämpfungskonstante bedeutet. Die vorstehenden Exponentialfunktionen haben genau die den Gl. (20) u. (21) entsprechenden Eigenschaften; es ist

$$e^{+i\eta x} = \cos \eta x + i \sin \eta x,$$
$$e^{-i\eta x} = \cos \eta x - i \sin \eta x$$

und mit

$$\eta x = r\,e^{i\vartheta} = r\cos\vartheta + i\,r\sin\vartheta,$$
$$\lim e^{+i\eta x} = 0 \quad \text{für} \quad r\to\infty, \qquad 0<\vartheta<\pi,$$
$$\lim e^{-i\eta x} = 0 \quad \text{für} \quad r\to\infty, \qquad \pi<\vartheta<2\pi.$$

Auf Grund dieser Feststellungen werden wir zur Berechnung der erzwungenen Schwingungen den Lösungsansatz (19c), dagegen für die Darstellung der Eigenschwingungen den Ansatz (19a), (19b) benutzen.

7. Erzwungene Schwingungen und Wellen auf der Besselschen Leitung

a) Die endlich lange Leitung mit beliebigem Abschluß

Für den eingeschwungenen Zustand mit der Kreisfrequenz ω hat man in dem allgemeinen Ansatz [Gl. (3)] $p = i\,\omega$ einzusetzen. Für die Funktionen φ und ψ gilt (18b) bzw. (18d); als Zylinderfunktionen benutzen wir die Hankelschen nach Gl. (19c). Hiermit ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} V &= (i\,\omega+\varrho_1)(1+\lambda x)\left[c_1 H_1^{(1)}\frac{m}{\lambda}(1+\lambda x)+c_2 H_1^{(2)}\frac{m}{\lambda}(1+\lambda x)\right]e^{i\omega t},\\ I &= -\frac{m}{L_0}\left[c_1 H_0^{(1)}\frac{m}{\lambda}(1+\lambda x)+c_2 H_0^{(2)}\frac{m}{\lambda}(1+\lambda x)\right]e^{i\omega t}. \end{aligned}\right| \qquad (22)$$

Der Festwert m ist aus Gl. (18a) zu berechnen. Wir schreiben

$$m = \alpha - i\,\beta, \qquad (23)$$

wobei α und β wesentlich positive Zahlen sein sollen. Diese Schreibweise entspricht für die homogene Leitung der bereits angeführten Zerlegung $\eta = \alpha - i\,\beta$; α Winkelkonstante, β Dämpfungskonstante.

Aus (23) und (18a) folgt

$$L_0 C_0 (i\,\omega+\varrho_1)(i\,\omega+\varrho_2) = -(\alpha - i\,\beta)^2.$$

Die Auflösung dieser Gleichung nach α und β liefert die Ausdrücke

$$\alpha = \sqrt{\frac{L_0 C_0}{2}}\sqrt{(\omega^2-\varrho_1\varrho_2)+\sqrt{(\omega^2-\varrho_1\varrho_2)^2+\omega^2(\varrho_1+\varrho_2)^2}}, \qquad (23a)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{L_0 C_0}{2}}\sqrt{-(\omega^2-\varrho_1\varrho_2)+\sqrt{(\omega^2-\varrho_1\varrho_2)^2+\omega^2(\varrho_1+\varrho_2)^2}}. \qquad (23b)$$

Sind die Verluste klein, so ergeben sich mit

$$\varrho_1 \ll \omega, \qquad \varrho_2 \ll \omega$$

die Näherungswerte

$$\alpha \approx \omega\sqrt{L_0 C_0}, \qquad (23c)$$

$$\beta \approx \frac{1}{2}\sqrt{L_0 C_0}\,(\varrho_1+\varrho_2) = \frac{R_0}{2}\sqrt{\frac{C_0}{L_0}} + \frac{G_0}{2}\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}. \qquad (23d)$$

R_0 ist der Widerstand, G_0 die Ableitung für $x = 0$.

Die Ausdrücke (23c), (23d) entsprechen völlig denen für die homogene Leitung mit den Leitungskonstanten R_0, L_0, G_0, C_0. Das ist auch verständlich, wenn man bedenkt, daß für jedes Leitungselement dx unserer Besselschen Leitung die Fortpflanzungskonstante $\gamma = \sqrt{(R+i\,\omega L)(G+i\,\omega C)}$ wegen der hier vorliegenden besonderen räumlichen Abhängigkeit von R, L, G, C sich auf den ortsunabhängigen Wert $\sqrt{(R_0+i\,\omega L_0)(G_0+i\,\omega C_0)}$ reduziert.

Die Festwerte c_1 und c_2 in den Gl. (22) sind aus den an den beiden Leitungsenden geltenden Grenzbedingungen zu berechnen.

Am Anfang werde die Leitung aus einer Stromquelle mit der Spannung $E\,e^{i\omega t}$ gespeist. Dann gilt nach der ersten Gl. (22)

$$E = (i\,\omega+\varrho_1)\left[c_1 H_1^{(1)}\left(\frac{m}{\lambda}\right)+c_2 H_1^{(2)}\left(\frac{m}{\lambda}\right)\right]. \qquad (24a)$$

Am Ende $x = l$ sei die Leitung auf einen Stromkreis mit dem (komplexen) Scheinwiderstand $W = W(\omega)$ geschlossen; dort gilt mithin

$$V(l) = W\,I(l).$$

Setzt man hierin die Ausdrücke (22) mit $x = l$ ein, so erhält man eine weitere Gleichung zwischen c_1 und c_2, nämlich

$$\left.\begin{aligned}(i\omega + \varrho_1)(1+\lambda l)\left[c_1 H_1^{(1)}\frac{m}{\lambda}(1+\lambda l) + c_2 H_1^{(2)}\frac{m}{\lambda}(1+\lambda l)\right] \\ = -\frac{W m}{L_0}\left[c_1 H_0^{(1)}\frac{m}{\lambda}(1+\lambda l) + c_2 H_0^{(2)}\frac{m}{\lambda}(1+\lambda l)\right].\end{aligned}\right\} \tag{24b}$$

Aus (24a) und (24b) kann man c_1 und c_2 berechnen und in (22) einsetzen; hiermit ist die räumliche Verteilung von Spannung und Strom auf der Besselschen Leitung im eingeschwungenen Zustand bei der Kreisfrequenz ω vollständig bestimmt.

Jede der beiden Hankelschen Funktionen $H^{(1)}$ und $H^{(2)}$ beschreibt eine längs der Leitung fortschreitende Welle ähnlicher Art, wie die Funktionen $e^{i\eta x}$ und $e^{-i\eta x}$ es für die homogene Leitung tun. Um diesen Vorgang näher zu untersuchen, betrachten wir die Spannungs- und Stromverteilung auf einer einseitig unbegrenzten Leitung. Auf einer solchen tritt nur die durch die Funktionen $H^{(2)}$ dargestellte Spannungs- und Stromverteilung auf, die einer vom Punkte $x = 0$ ausgehenden und in Richtung wachsender x laufenden Welle entspricht. Dagegen bedeuten die Funktionen $H^{(1)}$ eine in umgekehrter Richtung laufende Welle, d. h. einen Energietransport von dem fernen Leitungsende nach dem Leitungsanfang hin. Eine solche Welle kann, falls sich die Stromquelle am Leitungsanfang befindet, nur durch Spiegelung am anderen Leitungsende entstanden sein. Wir schließen sie aus, indem wir das Leitungsende nach $x \to \infty$ rücken.

b) Die Ausbreitung von Wellen auf der einseitig unbegrenzten Besselschen Leitung

Läßt man nach dem soeben ausgeführten in den Gl. (22) die Glieder mit $H_1^{(1)}$ und $H_0^{(1)}$ weg und berechnet c_2 aus Gl. (24a), so erhält man die Ausdrücke

$$V = E(1+\lambda x)\frac{H_1^{(2)}\frac{m}{\lambda}(1+\lambda x)}{H_1^{(2)}\left(\frac{m}{\lambda}\right)}, \tag{25a}$$

$$I = E\sqrt{\frac{C_0}{L_0}}\sqrt{\frac{i\omega+\varrho_2}{i\omega+\varrho_1}}\,\frac{i H_0^{(2)}\frac{m}{\lambda}(1+\lambda x)}{H_1^{(2)}\left(\frac{m}{\lambda}\right)}. \tag{25b}$$

Bei geringen Verlusten ($\varrho_1 \ll \omega$; $\varrho_2 \ll \omega$) kann man

$$\sqrt{\frac{i\omega+\varrho_2}{i\omega+\varrho_1}} \approx 1$$

setzen.

Im folgenden Zahlenbeispiel nehmen wir zur Vereinfachung der Rechnung $\varrho_1 = \varrho_2 = 0$ an; d. h. wir betrachten eine verlustfreie Leitung. Es sei

$$\frac{m}{\lambda} = \frac{\omega\sqrt{L_0 C_0}}{\lambda} = 1.$$

Betrag und Phasenwinkel der in (25a), (25b) auftretenden Funktionen

$$i H_0^{(2)}(1+\lambda x) = |H_0^{(2)}(1+\lambda x)|\,e^{i\alpha_0},$$
$$H_1^{(2)}(1+\lambda x) = |H_1^{(2)}(1+\lambda x)|\,e^{i\alpha_1}$$

lassen sich an Hand der zweiten Gl. (20) mittels der in den Funktionentafeln von Jahnke-Emde angegebenen Werte der Funktionen J_0, N_0 bzw. J_1, N_1 berechnen

und sind in Bild 3 als Funktionen des Arguments $(1+\lambda x)$, d. h. in ihrer Abhängigkeit von der Leitungslänge dargestellt. Die Beträge nehmen beständig ab, ebenso die Phasenwinkel[1]) α_0 und α_1. Je weiter man in die Leitung hineingeht, um so mehr bleiben Spannung und Strom gegenüber ihren Werten am Eingang der Leitung in der Phase zurück, wie es bei einer in die Leitung hineinlaufenden Welle sein muß. Der Abstand zweier Punkte x_1 und x_2 mit einem Phasenunterschied von 360° ist gleich einer Wellenlänge. Ihr Betrag ist, wenn man die nähere Umgebung des Leitungsanfanges außer Betracht läßt, unveränderlich gleich

$$x_2 - x_1 = \frac{6{,}28}{\lambda}.$$

Man kann diesen Wert entweder dem Bild 2 entnehmen oder aus den Grenzwerten der Hankelschen Funktionen für großes Argument berechnen. Diese Grenzwerte sind

$$H_p^{(2)}(1+\lambda x) \to \frac{e^{-i\left[1+\lambda x - \frac{2p+1}{4}\pi\right]}}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi(1+\lambda x)}}. \tag{26}$$

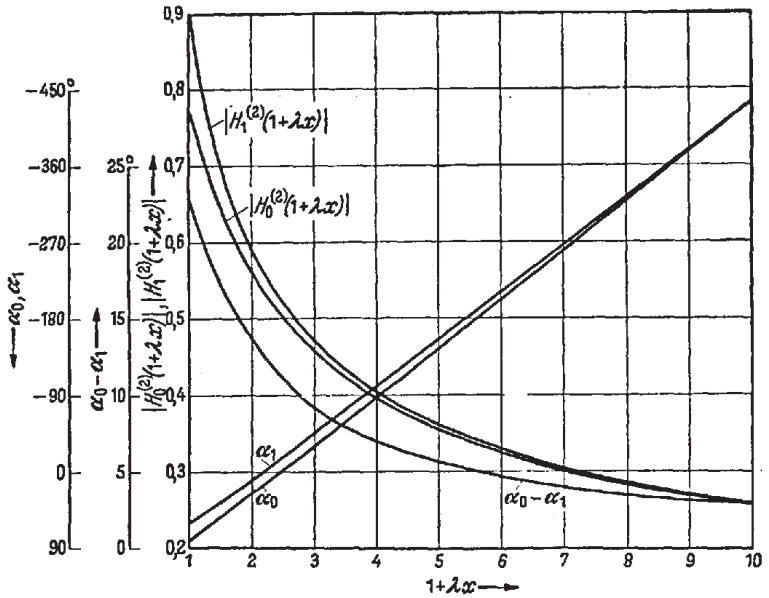

Bild 3. Beträge und Phasenwinkel der Hankelschen Zylinderfunktionen $H_0^{(2)}(1+\lambda x)$ und $H_1^{(2)}(1+\lambda x)$.

Man erhält einen Winkelunterschied von 360°, wenn

$$(1+\lambda x_2) - (1+\lambda x_1) = 2\pi$$

ist, woraus der vorher angegebene Abstand $x_2 - x_1$ folgt.

$\alpha_0 - \alpha_1$ ist der Phasenwinkel zwischen Strom und Spannung; er nimmt beständig ab, je weiter man in die Leitung hineingeht; für große x verschwindet er. Es ist nämlich [nach Gl. (26)]

$$\frac{I}{V} = \frac{1}{1+\lambda x}\sqrt{\frac{C_0}{L_0}} \cdot \frac{i H_0^{(2)}(1+\lambda x)}{H_1^{(2)}(1+\lambda x)} \to \frac{1}{1+\lambda x}\sqrt{\frac{C_0}{L_0}}, \qquad \text{für große } x, \tag{27a}$$

Mit Rücksicht auf Gl. (17a) u. (17b) kann man hierfür auch schreiben

$$\frac{I}{V} = \sqrt{\frac{C}{L}}, \qquad \text{für große } x, \tag{27b}$$

[1]) Man beachte, daß in Bild 3 negative Winkel α_0, α_1 nach oben aufgetragen sind.

d. h., für große x gilt für die Welle auf der Besselschen Leitung ebenso wie für Wellen auf der homogenen Leitung das einfache Gesetz: Wellenstrom gleich Wellenspannung, dividiert durch den Wellenwiderstand $Z = \sqrt{L/C}$. In Bild 4 ist dargestellt, wie sich das Verhältnis $(V/I)\sqrt{C/L}$ mit wachsendem x dem Grenzwert 1 nähert. Ferner zeigt dieses Bild die räumliche Abhängigkeit der Spannung V; sie nimmt mit wachsendem Abstand vom Leitungsanfang zu, weil auch der Wellenwiderstand

$$\sqrt{\frac{L}{C}} = (1+\lambda x)\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$$

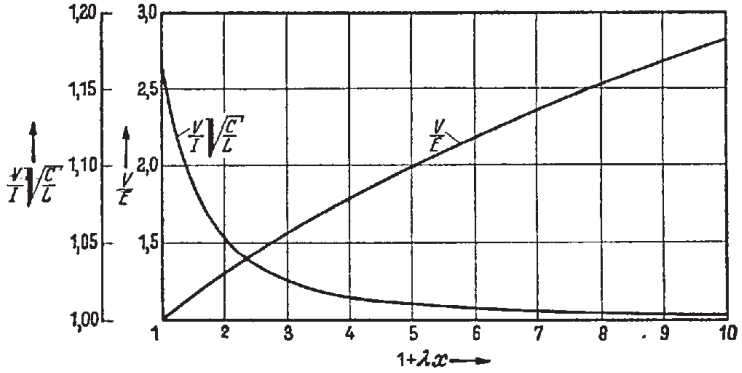

Bild 4. Spannungs- und Wellenwiderstandsänderung auf der einseitig unbegrenzten Besselschen Leitung (eingeschwungener Zustand).

wächst. Aus demselben Grund nimmt der Strom ab; sein Betrag wird bis auf einen festen Faktor durch den Betrag

$$|H_0^{(2)}(1+\lambda x)|$$

bestimmt, dessen Verlauf aus Bild 3 ersichtlich ist.

8. Die Eigenschwingungen der Besselschen Leitung

a) Normalvorgänge und Eigenfrequenzen

Die folgenden Ausführungen beschränken wir auf die verlustfreie Leitung. Man erhält dann ungedämpfte Eigenschwingungen, rein imaginäre Eigenwerte p und reelle Werte m [Gl. (18a) mit $\varrho_1 = \varrho_2 = 0$]. In diesem Fall ist es praktisch, die Normalfunktionen durch die Besselschen Funktionen J und die Neumannschen Funktionen N auszudrücken [Ansatz (18b), (18d) und (19a), (19b)]:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= (1+\lambda x)\left[c_1 J_1 \frac{m}{\lambda}(1+\lambda x) + c_2 N_1 \frac{m}{\lambda}(1+\lambda x)\right], \\ \psi &= -\frac{m}{L_0}\left[c_1 J_0 \frac{m}{\lambda}(1+\lambda x) + c_2 N_0 \frac{m}{\lambda}(1+\lambda x)\right]. \end{aligned}\right| \qquad (28)$$

Für die Festwerte c_1 und c_2 ergeben die Grenzbedingungen das Verhältnis c_2/c_1; außerdem liefern sie die Stammgleichung zur Berechnung der zulässigen Werte m, woraus sich dann mit (18a) die Eigenwerte p ergeben. Um die weitere Rechnung so einfach wie möglich zu gestalten und auch die Eigenschaften der Besselschen Leitung rein hervortreten zu lassen, nehmen wir die denkbar einfachsten Grenzbedingungen an: Die Leitung sei am Anfang $(x = 0)$ widerstandslos überbrückt, am Ende $(x = l)$ offen. Dann ist $W_0 = 0$, $W_l = \infty$ und hiermit, wegen (6a), (6b)

$$\varphi(0) = 0; \qquad \psi(l) = 0. \qquad (29)$$

Diese Bedingungen liefern, in (28) eingesetzt, die Gleichungen

$$c_1 J_1\left(\frac{m}{\lambda}\right) + c_2 N_1\left(\frac{m}{\lambda}\right) = 0,$$

$$c_1 J_0 \frac{m}{\lambda}(1+\lambda l) + c_2 N_0 \frac{m}{\lambda}(1+\lambda l) = 0.$$

Daraus folgt

$$-c=\frac{c_2}{c_1}=-\frac{J_1\left(\frac{m}{\lambda}\right)}{N_1\left(\frac{m}{\lambda}\right)}=-\frac{J_0\frac{m}{\lambda}(1+\lambda l)}{N_0\frac{m}{\lambda}(1+\lambda l)}\,. \tag{30}$$

Der zweite Teil dieser Beziehung ist zugleich die Stammgleichung. Mit den Abkürzungen

$$\frac{m}{\lambda}=z; \qquad 1+\lambda l=a \tag{30a}$$

schreiben wir sie in der Form

$$\frac{J_0(az)}{N_0(az)}=\frac{J_1(z)}{N_1(z)}\,. \tag{31}$$

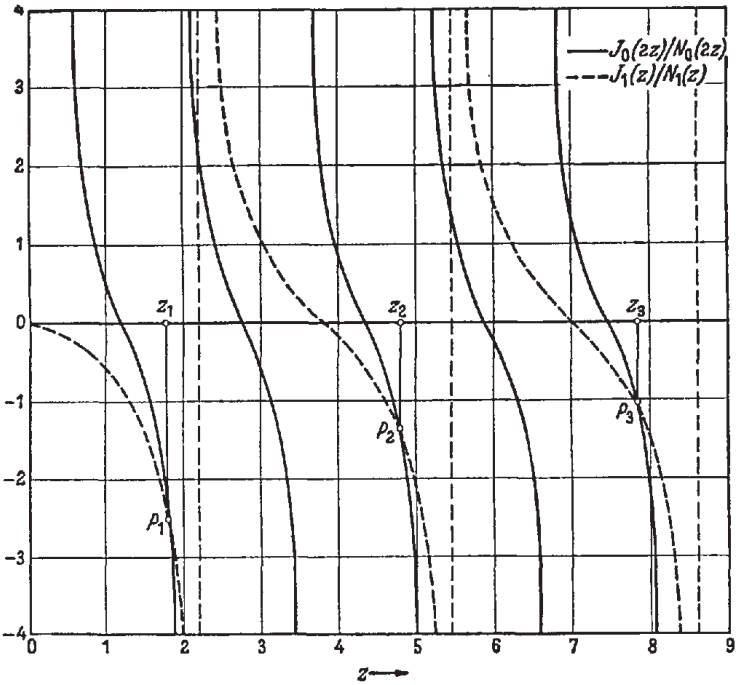

Bild 5. Zur Lösung der transzendenten Stammgleichung [Gl. (31)] der Besselschen Leitung zwecks Bestimmung der Eigenwerte.

Da zur Darstellung der Ausgleichsvorgänge nach Gl. (11) zu jeder Normalfunktion φ noch ein Amplitudenfaktor A verfügbar bleibt, können wir willkürlich $c_1=1$ setzen und mit Rücksicht auf Gl. (30)

$$\left.\begin{aligned}\varphi&=(1+\lambda x)\left[J_1\frac{m}{\lambda}(1+\lambda x)-cN_1\frac{m}{\lambda}(1+\lambda x)\right],\\ \psi&=-\frac{m}{L_0}\left[J_0\frac{m}{\lambda}(1+\lambda x)-cN_0\frac{m}{\lambda}(1+\lambda x)\right]\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

schreiben.

Zur Bestimmung der zulässigen Werte m aus der Stammgleichung (30) geht man zweckmäßig zeichnerisch vor. In Bild 5 ist

$$a=2$$

vorausgesetzt. Die ausgezogenen Linien stellen die Funktion $J_0(2z)/N_0(2z)$ dar; die punktierten Linien die Funktion $J_1(z)/N_1(z)$. Die Schnittpunkte P_1, P_2, P_3 ... bestimmen die Wurzeln z_1, z_2, z_3 ... der Stammgleichung. Die Zeichnung liefert die ersten drei Werte

$$z_1=1{,}79, \qquad z_2=4{,}80, \qquad z_3=7{,}85.$$

Weitere Werte ergeben sich aus einer näheren Betrachtung der Funktionen

$$\frac{J_0(az)}{N_0(az)} \quad \text{bzw.} \quad \frac{J_1(z)}{N_1(z)}.$$

Beide verlaufen ähnlich wie die Zweige der trigonometrischen Cotangensfunktion. Diese Ähnlichkeit ist mehr als eine äußerliche, insofern als sich die genannten Funktionen für große Argumentwerte asymptotisch der Cotangensfunktion anschmiegen. Es ist nämlich für große y[1]:

$$J_0(y) \approx \frac{\cos\left(y-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi y}}; \qquad N_0(y) \approx \frac{\sin\left(y-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi y}},$$

$$J_1(y) \approx \frac{\cos\left(y-\frac{3\pi}{4}\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi y}}; \qquad N_1(y) \approx \frac{\sin\left(y-\frac{3\pi}{4}\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi y}}.$$

Die Stammgleichung lautet demnach für große z

$$\frac{J_0(az)}{N_0(az)} \approx \operatorname{cotg}\left(az-\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{cotg}\left(z-\frac{3\pi}{4}\right) \approx \frac{J_1(z)}{N_1(z)}.$$

Ihre Lösung ist[2])

$$az-\frac{\pi}{4} = z-\frac{3\pi}{4}+k\pi,$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots$$

woraus

$$z_k \approx \frac{(2k-1)\frac{\pi}{2}}{a-1}. \tag{33}$$

In unserem Beispiel ($a = 2$) wird

$$z_1 = 1{,}571 \qquad z_4 = 10{,}99$$
$$z_2 = 4{,}71 \qquad z_5 = 14{,}14$$
$$z_3 = 7{,}85 \qquad z_6 = 17{,}28.$$

Der Vergleich der drei ersten dieser Zahlen mit den vorher angegebenen, aus der Zeichnung (Bild 5) ermittelten Werten lehrt, daß schon für z_3 die Näherungsformel (33) hinreichend genau ist und daher erst recht für die Berechnung der folgenden Wurzeln benutzt werden kann.

Aus (18a) folgt, mit $\varrho_1 = \varrho_2 = 0$, und (30a)

$$p_k = i\frac{m_k}{\sqrt{L_0 C_0}} = i z_k \cdot \frac{\lambda}{\sqrt{L_0 C_0}} = i\omega_k. \tag{34}$$

ω_k ist die Kreisfrequenz der k-ten Eigenschwingung. Für hinreichend große Werte von k (in unserem Beispiel für $k > 2$) kann man z_k aus Gl. (33) benutzen und erhält [mit $a - 1 = \lambda l$, Gl. (30a)]

$$\omega_k \approx \frac{(2k-1)\frac{\pi}{2}}{l\sqrt{L_0 C_0}}. \tag{34a}$$

Das sind dieselben Werte wie für eine homogene Leitung mit $L = L_0$, $C = C_0$. Die höheren Eigenfrequenzen der Besselschen Leitung nähern sich dem Verhältnis der ungeraden ganzen Zahlen mehr und mehr an.

Das zur Lösung der transzendenten Stammgleichung (31) eingeschlagene zeichnerische Verfahren liefert die reellen positiven Wurzeln. Es entsteht die Frage, ob es auch negative, imaginäre oder komplexe Wurzeln gibt.

[1]) Jahnke-Emde, Funktionentafeln, 1. Aufl., S. 99; 2. Aufl., S. 203.

[2]) k kann auch gleich Null oder gleich jeder negativen ganzen Zahl sein und liefert dann die negativen Wurzeln der Stammgleichung; bezüglich dieser ist weiter unten das Nötige gesagt.

α) Negative Wurzeln. Da für negatives reelles Argument die Neumannschen Funktionen komplex werden, die Besselschen Funktionen dagegen reell bleiben, ist das anschauliche Zeichenverfahren nicht anwendbar. Dagegen führt die folgende Überlegung zum Ziel. Es ist[1])

$$\left.\begin{aligned} J_0(-y) &= J_0(y) & N_0(-y) &= N_0(y) + 2i\,J_0(y) \\ J_1(-y) &= -J_1(y) & N_1(-y) &= -N_1(y) - 2i\,J_1(y) \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Setzt man nun in die Stammgleichung (31) den Wert $-z$ statt z und berücksichtigt die vorstehenden Beziehungen, so erkennt man, daß die Stammgleichung auch vom Wert $-z$ erfüllt wird, wenn sie für $+z$ gilt. Zu jeder positiven Wurzel gibt es mithin eine dem Betrage nach gleiche negative Wurzel. Wir brauchen diese negativen Wurzeln aber nicht zu berücksichtigen; denn jede negative Wurzel liefert wegen der Beziehungen (35) dieselben Normalfunktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ wie die entsprechende positive Wurzel, wenn man von einem konstanten (komplexen) Faktor absieht, auf den es aber nicht ankommt, und den wir daher, ebenso wie früher c_1, gleich Eins setzen dürfen.

β) Komplexe Wurzeln. Zur Frage, ob es auch komplexe[2]) Wurzeln gibt, ist an Hand der Gl. (30) zunächst festzustellen, daß solche Wurzeln nur konjugiert auftreten können. Die Annahme konjugiert komplexer Wurzeln führt jedoch auf einen Widerspruch.

Mit den Grenzbedingungen (29) und mit $\varrho_1 = \varrho_2 = 0$ folgt aus (16a)

$$(p_\mu^2 - p_\nu^2) \int_0^l C\,\varphi_\mu\,\varphi_\nu\,\mathrm{d}x = 0.$$

Nehmen wir nun für p_μ und p_ν das Paar konjugiert komplexer Wurzeln, so ist p_μ^2, von p_ν^2 verschieden, folglich

$$\int_0^l C\,\varphi_\mu\,\varphi_\nu\,\mathrm{d}x = 0.$$

Nun ist φ_μ, die zu p_μ gehörige Normalfunktion, konjugiert komplex zu φ_ν, der Normalfunktion zum Eigenwert p_ν. Das Produkt $\varphi_\mu\,\varphi_\nu$ ist daher überall positiv; auch C ist positiv, und das Integral kann deshalb nicht verschwinden, wie es die vorstehende Gleichung verlangt.

Unsere Stammgleichung hat mithin keine anderen Wurzeln als die bereits ermittelten reellen Wurzeln. Diese Feststellung ist wichtig, da jede Wurzel einen möglichen freien Vorgang auf der Leitung bestimmt und bei der Darstellung von Ausgleichsvergängen nach Gl. (11) sämtliche freien Bewegungsvorgänge zu berücksichtigen sind.

b) Einschaltvorgang

Die vorstehenden Ergebnisse wollen wir nun zur Berechnung des Einschaltvorganges der am Ende offenen Leitung mit der Gleichspannung E anwenden. Wenn die Stromquelle, wie vorausgesetzt sei, keinen inneren Widerstand hat, so wirkt der Leitungsanfang für die freien Schwingungen wie ein Kurzschluß; es gelten mithin die Grenzbedingungen nach Gl. (29) und die Ansätze (32) für die Normalfunktionen mit den im vorhergehenden Abschnitt festgestellten Wurzeln m_k. Den Einschaltvorgang stellen wir nach Gl. (11) durch Überlagerung aller möglichen Normalvorgänge dar, wobei noch der feste Endwert E der Spannung hinzuzufügen ist[3]):

[1]) Jahnke-Emde, Funktionentafeln, 2. Aufl., S. 194, 198.

[2]) Wir rechnen hierzu auch etwa vorkommende rein imaginäre Wurzeln.

[3]) Der Ansatz $V = E$, $I = 0$, der den Endzustand darstellt, ist auch eine Teillösung der Differentialgleichungen (1) mit $R = 0$, $G = 0$.

$$V = E + \sum_k A_k p_k \varphi_k(x)\, e^{p_k t} \qquad I = \sum_k A_k \psi_k(x)\, e^{p_k t} \tag{36}$$

Die Amplituden A_k müssen so berechnet werden, daß die Anfangsbedingungen

$$V = 0, \qquad I = 0 \quad \text{für} \quad t = 0, \qquad \text{alle } x > 0$$

erfüllt sind; d. h. es muß

$$\Phi(x) = -E = \sum_k A_k p_k \varphi_k(x) \qquad \Psi(x) = 0 = \sum_k A_k \psi_k(x) \tag{36a}$$

sein. Da keine Energiespeicher mit den Leitungsenden verbunden sind, sind die Energien und die wechselseitigen Energien nur für die Leitung selbst zu berechnen. Mit $\Psi(x) = 0$ verschwindet auch die wechselseitige magnetische Energie der Leitung. Der allgemeine Ausdruck (14) vereinfacht sich mithin für unsern Fall zu

$$A_k = -\frac{p_k E \int_0^l C \varphi_k(x)\, dx}{p_k \int_0^l C [\varphi_k(x)]^2\, dx - \int_0^l L [\psi_k(x)]^2\, dx}. \tag{36b}$$

In der folgenden Zwischenrechnung lassen wir, der kürzeren Schreibung halber den Ordnungszeiger k weg, um ihn dann im Schlußergebnis wieder hinzuzufügen. Für den Zähler von (36b) erhält man

$$p E \int_0^l C \varphi\, dx = p C_0 E \int_0^l \left[J_1 \frac{m}{\lambda}(1 + \lambda x) - c N_1 \frac{m}{\lambda}(1 + \lambda x) \right] dx$$
$$= \frac{p C_0 E}{m} \left[J_0\left(\frac{m}{\lambda}\right) - c N_0\left(\frac{m}{\lambda}\right) \right],$$

da $J_0 \frac{m}{\lambda}(1 + \lambda l) - c N_0 \frac{m}{\lambda}(1 + \lambda l) = 0$ ist, wegen Gl. (30). Setzt man den Wert von c aus (30) in den vorstehenden Ausdruck ein und berücksichtigt die Funktionalbeziehung[1])

$$N_0(y) J_1(y) - N_1(y) J_0(y) = \frac{2}{\pi y}, \tag{37}$$

so folgt

$$p E \int_0^l C \varphi\, dx = \frac{2 E \lambda}{\pi p L_0 N_1\left(\frac{m}{\lambda}\right)}. \tag{38a}$$

Die Integrale im Nenner von (36b) ergeben sich mittels der Formeln (16b) und (16d). Man erhält

$$2 p^2 \int_0^l C \varphi^2\, dx = \left[\frac{1}{L} \left(\varphi\, p \frac{d\varphi'}{dp} - \varphi'\, p \frac{d\varphi}{dp} \right) \right]_0^l.$$

Für die rechts auszuführende Operation $p \frac{d}{dp}$ kann man auch $m \frac{d}{dm}$ setzen, was sich aus der Gleichung [s. Gl. (18a)]

$$-m^2 = p^2 L_0 C_0$$

sofort ergibt. Da nach Gl. (29) $\varphi(0) = 0$ und auch $\varphi'(l) = -L \psi(l) = 0$ ist, wird

$$2 p^2 \int_0^l C \varphi^2\, dx = \frac{\varphi(l)}{L(l)} \left(m \frac{d\varphi'}{dm} \right)_l + \frac{\varphi'(0)}{L(0)} \left(m \frac{d\varphi}{dm} \right)_0.$$

Mit Rücksicht auf die Ausdrücke (28), die Grenzbedingungen (29), die Beziehung

$$\varphi'(x) = -L \psi(x)$$

[1]) Jahnke-Emde, Funktionentafeln, 1. Aufl., S. 165; 2. Aufl., S. 212.

und Gl. (37) erhält man

$$\left.\begin{aligned}\left(m\frac{\mathrm{d}\varphi'}{\mathrm{d}m}\right)_l &= \frac{m^2(1+\lambda l)^2}{\lambda}\left[-J_1\frac{m}{\lambda}(1+\lambda l)+cN_1\frac{m}{\lambda}(1+\lambda l)\right]\\ &= -\frac{2}{\pi}\frac{m(1+\lambda l)}{N_0\frac{m}{\lambda}(1+\lambda l)},\end{aligned}\right\}$$

und hieraus weiter

$$\frac{\varphi(l)}{L(l)}\left(m\frac{\mathrm{d}\varphi'}{\mathrm{d}m}\right)_l = -\frac{4\lambda}{\pi^2 L_0}\frac{1}{\left[N_0\frac{m}{\lambda}(1+\lambda l)\right]^2}.$$

Ferner:

$$\left(m\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}m}\right)_0 = \frac{m}{\lambda}\left[J_0\left(\frac{m}{\lambda}\right)-cN_0\frac{m}{\lambda}\right] = \frac{2}{\pi}\frac{1}{N_1\left(\frac{m}{\lambda}\right)},$$

$$\frac{\varphi'(0)}{L(0)}\left(m\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}m}\right)_0 = \frac{4\lambda}{\pi^2 L_0}\frac{1}{\left[N_1\left(\frac{m}{\lambda}\right)\right]^2}.$$

Mithin

$$p^2\int_0^l C\varphi^2\,\mathrm{d}x = \frac{2\lambda}{\pi^2 L_0}\frac{\left[N_0\frac{m}{\lambda}(1+\lambda l)\right]^2-\left[N_1\left(\frac{m}{\lambda}\right)\right]^2}{\left[N_1\left(\frac{m}{\lambda}\right)N_0\frac{m}{\lambda}(1+\lambda l)\right]^2}. \tag{38b}$$

Ganz entsprechend ist das zweite Integral im Nenner von (36b) zu berechnen. Man erhält

$$\int_0^l L\psi^2\,\mathrm{d}x = \frac{2\lambda}{\pi^2 L_0}\frac{\left[N_1\left(\frac{m}{\lambda}\right)\right]^2-\left[N_0\frac{m}{\lambda}(1+\lambda l)\right]^2}{\left[N_1\left(\frac{m}{\lambda}\right)N_0\frac{m}{\lambda}(1+\lambda l)\right]^2} = -p^2\int_0^l C\varphi^2\,\mathrm{d}x. \tag{38c}$$

Setzt man die Ausdrücke (38a), (38b), (38c) in Gl. (36b) ein, so erhält man die gesuchte Amplitude des k-ten Normalvorganges

$$A_k = -\frac{E}{p_k}F(m_k) \tag{39a}$$

mit

$$F(m_k) = \frac{\pi}{2}\frac{N_1\left(\frac{m_k}{\lambda}\right)\left[N_0\frac{m_k}{\lambda}(1+\lambda l)\right]^2}{\left[N_0\frac{m_k}{\lambda}(1+\lambda l)\right]^2-\left[N_1\left(\frac{m_k}{\lambda}\right)\right]^2}. \tag{39b}$$

Da

$$p_k = \pm i\frac{m_k}{\sqrt{L_0 C_0}} \tag{39c}$$

ist, gehören zu jeder Wurzel m_k zwei Eigenwerte p_k. Beide sind in der Summenformel (36) zu berücksichtigen; hiermit ergibt sich die gesuchte Lösung

$$\left.\begin{aligned}V &= E-2E(1+\lambda x)\sum_k F(m_k)\left[J_1\frac{m_k}{\lambda}(1+\lambda x)-c_k N_1\frac{m_k}{\lambda}(1+\lambda x)\right]\cos\frac{m_k t}{\sqrt{L_0 C_0}}\\ I &= 2E\sqrt{\frac{C_0}{L_0}}\sum_k F(m_k)\left[J_0\frac{m_k}{\lambda}(1+\lambda x)-c_k N_0\frac{m_k}{\lambda}(1+\lambda x)\right]\sin\frac{m_k t}{\sqrt{L_0 C_0}}\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

mit

$$c_k = \frac{J_1\left(\frac{m_k}{\lambda}\right)}{N_1\left(\frac{m_k}{\lambda}\right)} = \frac{J_0\frac{m_k}{\lambda}(1+\lambda l)}{N_0\frac{m_k}{\lambda}(1+\lambda l)}. \tag{40a}$$

Ein angenähertes Bild von dem durch diese Gleichungen beschriebenen Ausgleichsvorgang gewinnt man auf dem folgenden Wege, der durch die Gl. (33) nahegelegt wird. Wir hatten dort gefunden, daß man die beiden ersten Wurzeln der

Stammgleichung mit einer leidlichen Annäherung und alle übrigen Wurzeln sogar sehr genau erhält, wenn man die Zylinderfunktionen durch ihre Näherungswerte für großes Argument ersetzt.

Tut man dies auch mit den in Gl. (40), (40a) vorkommenden Ausdrücken und beachtet, daß für unser Beispiel

$$\frac{m_k}{\lambda} \approx \frac{(2k-1)\pi}{2}, \qquad \frac{m_k}{\lambda}(1+\lambda l) = (2k-1)\pi, \qquad 1+\lambda x = 1+\frac{x}{l}$$

ist, so erhält man

$$F(m_k) = \frac{\cos(k-1)\pi}{\sqrt{2}\sqrt{2k-1}}, \qquad c_k = -1, \qquad \frac{m_k t}{\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{(2k-1)\pi}{2l}\cdot\frac{t}{\sqrt{L_0 C_0}},$$

$$J_1\frac{m_k}{\lambda}(1+\lambda x) - c_k N_1 \frac{m_k}{\lambda}(1+\lambda x) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\frac{\sin\frac{(2k-1)\pi}{2}\sin(2k-1)\frac{\pi x}{2l}}{\sqrt{(2k-1)\left(1+\frac{x}{l}\right)}},$$

$$J_0\frac{m_k}{\lambda}(1+\lambda x) - c_k N_0 \frac{m_k}{\lambda}(1+\lambda x) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\frac{\sin\frac{(2k-1)\pi}{2}\cos(2k-1)\frac{\pi x}{2l}}{\sqrt{(2k-1)\left(1+\frac{x}{l}\right)}}.$$

Setzt man diese Werte in Gl. (40) ein und beachtet, daß

$$\cos(k-1)\pi \sin(2k-1)\frac{\pi}{2} = 1$$

ist, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} V &= E - \frac{4}{\pi}E\sqrt{1+\frac{x}{l}}\sum_{k=1,2,\ldots}\frac{\sin(2k-1)\frac{\pi x}{2l}\cos\frac{(2k-1)\pi}{2l}\frac{t}{\sqrt{L_0 C_0}}}{2k-1} \\ I &= \frac{4}{\pi}\frac{E\sqrt{\frac{C_0}{L_0}}}{\sqrt{1+\frac{x}{l}}}\sum_{k=1,2,\ldots}\frac{\cos(2k-1)\frac{\pi x}{2l}\sin\frac{(2k-1)\pi}{2l}\frac{t}{\sqrt{L_0 C_0}}}{2k-1}. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Mit

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1,2,\ldots}\frac{\sin(2k-1)\frac{\pi x}{2l}}{2k-1} \tag{41a}$$

kann man die vorstehenden Ausdrücke in der Form schreiben

$$\left.\begin{aligned} V &= E - E\sqrt{1+\frac{x}{l}}\{f(x-wt)+f(x+wt)\} \\ I &= -E\sqrt{\frac{C_0}{L_0}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{l}}}\{f(x-wt)-f(x+wt)\}. \end{aligned}\right\} \tag{41b}$$

$$w = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}. \tag{41c}$$

Mit dieser Näherungslösung lassen sich sehr einfache und anschauliche Vorstellungen verbinden. Die Ausdrücke in den geschweiften Klammern in (41b) sind als unverzerrt fortschreitende Wellen zu deuten, von denen die erste in Richtung wachsender x, die zweite in Richtung abnehmender x über die Leitung läuft. Demgemäß hat für die zweite Welle der Strom das umgekehrte Vorzeichen. Die Wellengeschwindigkeit hat den durch Gl. (41c) bestimmten Festwert. Daß ein solcher Festwert zustande kommt, liegt daran, daß L und C sich räumlich im umgekehrten

Verhältnis ändern [Gl. (17a), (17b)], so daß das Produkt $LC = L_0 C_0$ auf der ganzen Leitung denselben Wert hat. Wenn wir, ebenso wie auf der homogenen Leitung die Größe

$$\sqrt{\frac{L}{C}} = (1 + \lambda x)\sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \left(1 + \frac{x}{l}\right)\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$$

als „Wellenwiderstand" der ungleichförmigen Leitung definieren, so sehen wir, daß dieser nach dem Ende der Leitung hin beständig zunimmt. Es ist daher verständlich, daß die Spannungswellen noch mit dem Faktor $\sqrt{1 + x/l}$ multipliziert erscheinen, wogegen die Stromwellen durch denselben Faktor zu dividieren sind[1]). Die Wellenform $f(x)$ entspricht der in Bild 6 gezeichneten Rechteckschwingung mit der Amplitude $\frac{1}{2}$ und der Wellenlänge $4l$. Der Einschaltvorgang ist also genau derselbe wie auf einer gleichförmigen Leitung mit der Kapazität C_0 und der Induktivität L_0, sofern

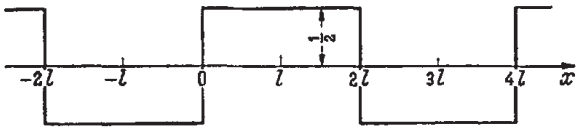

Bild 6. Wellenform nach Gl. (41a) (Rechteckschwingung).

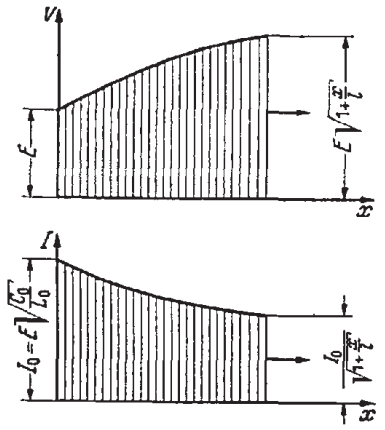

Bild 7. Spannungs- und Stromwelle beim Einschalten der Besselschen Leitung.

man von dem vorerwähnten Größenfaktor $\sqrt{1 + x/l}$ absieht. Berücksichtigt man ihn, so ergibt sich für einen Zeitpunkt, in dem die resultierende Welle das Leitungsende noch nicht erreicht hat, die in Bild 7 dargestellte Spannungs- und Stromverteilung. Auch die späteren Zustände, die sich durch die aufeinanderfolgenden Spiegelungen der Einschaltwelle an den Leitungsenden ergeben, sind aus den entsprechenden (bekannten) Zuständen auf der homogenen Leitung abzuleiten, indem man für die Spannung den Faktor $\sqrt{1 + x/l}$, für den Strom den Faktor $1/\sqrt{1 + x/l}$ hinzufügt.

Wir wollen nicht vergessen, daß die Ausdrücke (41) bis (41b) nur angenähert richtig sind, wenngleich in unserem Zahlenbeispiel die Abweichung von den genauen Formeln sehr gering ist. Da die Abweichung stets nur in den ersten Gliedern der Reihen in (40) merklich ist, kann man die Näherungslösung (41) bzw. (41b) leicht beliebig verbessern, indem man für die ersten Glieder den Unterschied zwischen (40) und (41) berechnet und zu (41b) hinzufügt.

Die Berechnung anderer Ausgleichsvorgänge, die sich aus abweichenden Anfangsbedingungen oder beim Vorhandensein bestimmter Endschaltungen ergeben, ist nach dem Muster der vorhergehenden Berechnung leicht durchzuführen.

9. Potenzleitungen und Exponentialleitungen

a) Potenzleitungen

In den Abschnitten 6 bis 8 ist als Beispiel einer inhomogenen Leitung die Besselsche Leitung eingehend behandelt worden. Die räumliche Abhängigkeit der Induktivität und der Kapazität dieser Leitung befolgt ein sehr spezielles Gesetz [Gl. (17a), (17b)]. Eine wesentliche Verallgemeinerung ist der Ansatz

$$\left.\begin{aligned} L &= L_0 (1 + \lambda x)^r \\ C &= C_0 (1 + \lambda x)^s, \end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

[1]) Faßt man das Leitungsstück zwischen $x = 0$ und $x = x$ als ungleichseitigen Vierpol auf, so ist $\sqrt{1 + x/l}$ das Spannungs-Übersetzungsverhältnis im Sinne der Vierpoltheorie; der Kehrwert ist das Strom-Übersetzungsverhältnis.

wo r und s beliebige ganze oder unganze, positive oder negative Zahlen sein sollen. Bild 8 zeigt, welche Fülle von Möglichkeiten in dem Ansatz (42) liegt. Leitungen dieser Art wollen wir Potenzleitungen nennen.

Ein Grenzfall sind die Exponentialleitungen, für die

$$\left.\begin{aligned} L &= L_0\, e^{\beta x} \\ C &= C_0\, e^{\gamma x} \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

ist; dabei sollen auch β und γ beliebige Zahlen sein[1]).

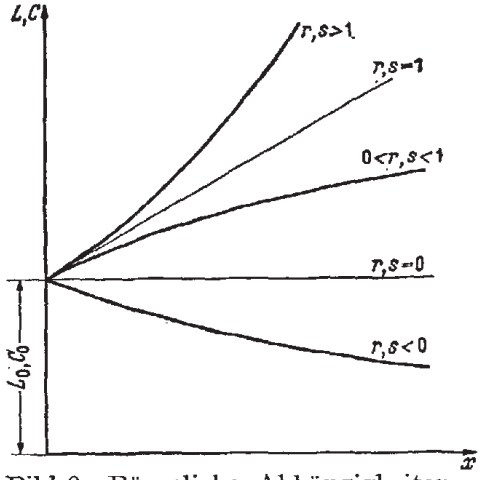

Bild 8. Räumliche Abhängigkeiten der Induktivität oder Kapazität von Potenzleitungen.

Die Rechnung mit diesen und ähnlichen Ansätzen vereinfacht sich, wenn man die Differentialgleichungen der Normalfunktionen [Gl. (4a), 4b)] durch Einführung einer neuen Raumkoordinate η vereinfacht, die durch

$$\frac{d\eta}{dx} = \sqrt{LC} \tag{44}$$

gegeben ist. Für das unendlich kurze und daher als gleichförmig zu betrachtende Leitungselement dx ist $d\eta$ die Zeit, die eine elektromagnetische Welle braucht, um die Strecke dx zurückzulegen; d. h. unsere neue Koordinate η ergibt nach der Formel

$$\eta - \eta_0 = \int_0^x \sqrt{LC}\, dx \tag{44a}$$

die Laufzeit, die eine elektromagnetische Störung benötigt, um vom Leitungsanfang bis zu dem betreffenden Leitungspunkt x zu gelangen. Im übrigen lehrt diese Überlegung, daß es auch auf der ungleichförmigen Leitung eine endliche Zeit dauert, bis ein am Leitungsanfang vorgenommener Schaltvorgang sich an einem anderen Leitungspunkt bemerkbar macht und daß diese Zeit durch den Ausdruck (44a) gegeben ist. Mit

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{d\eta}\cdot\frac{d\eta}{dx} = \sqrt{LC}\,\frac{d}{d\eta}$$

und

$$(p+\varrho_1)(p+\varrho_2) = -\frac{m^2}{L_0 C_0} \tag{45}$$

erhält man aus Gl. (4a)

$$\frac{d^2\varphi}{d\eta^2} + Z\,\frac{d\frac{1}{Z}}{d\eta}\cdot\frac{d\varphi}{d\eta} = -\frac{m^2}{L_0 C_0}\varphi$$

oder

$$\frac{d^2\varphi}{d\eta^2} - \frac{1}{Z}\frac{dZ}{d\eta}\cdot\frac{d\varphi}{d\eta} + \frac{m^2}{L_0 C_0}\varphi = 0\,. \tag{46a}$$

Ebenso ergibt sich aus Gl. (4b)

$$\frac{d^2\psi}{d\eta^2} + \frac{1}{Z}\frac{dZ}{d\eta}\cdot\frac{d\psi}{d\eta} + \frac{m^2}{L_0 C_0}\psi = 0 \tag{46b}$$

mit

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}}\,. \tag{46c}$$

[1]) Es ist $e^{\beta x} = \lim_{r=\infty}\left(1+\frac{\beta x}{r}\right)^r$.

Ferner folgt aus der zweiten Gl. (3) und aus Gl. (4c)

$$\left.\begin{aligned} \psi(\eta) &= -\frac{1}{Z}\varphi'(\eta) \\ \psi'(\eta) &= \frac{m^2}{Z L_0 C_0}\varphi(\eta)\,. \end{aligned}\right\} \tag{46d}$$

Hiermit sind die Normalfunktionen auf die neue Ortskoordinate η umgerechnet.

Nach Gl. (42) u. (44a) ist

$$\eta = \eta_0 (1+\lambda x)^{\frac{r+s+2}{2}}; \qquad \eta_0 = \frac{2\sqrt{L_0 C_0}}{\lambda (r+s+2)}. \tag{47}$$

Ferner erhält man, mit $Z_0 = \sqrt{L_0/C_0}$,

$$\frac{Z}{Z_0} = (1+\lambda x)^{\frac{r-s}{2}} = \left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^{\frac{r-s}{r+s+2}}. \tag{48}$$

Nun ist

$$\frac{1}{Z}\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\eta} = \frac{\mathrm{d}\ln Z}{\mathrm{d}\eta} = \frac{r-s}{r+s+2}\cdot\frac{1}{\eta}.$$

Dies in (46a) und (46b) eingesetzt, ergibt

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\eta^2} - \frac{r-s}{r+s+2}\cdot\frac{1}{\eta}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\eta} + \frac{m^2}{L_0 C_0}\varphi = 0\,, \tag{49a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\eta^2} + \frac{r-s}{r+s+2}\cdot\frac{1}{\eta}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\eta} + \frac{m^2}{L_0 C_0}\psi = 0\,. \tag{49b}$$

Diese Differentialgleichungen lassen sich in der Form schreiben

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\eta^2} + \frac{1-2\alpha}{\eta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\eta} + k^2 y = 0. \tag{49c}$$

Ihre Lösung wird durch Zylinderfunktionen ausgedrückt[1]):

$$y = \eta^\alpha X_\alpha(k\eta), \tag{49d}$$

wo man für X entweder

oder

$$\left.\begin{aligned} X &= c_1 J + c_2 N \\ X &= \bar{c}_1 H^{(1)} + \bar{c}_2 H^{(2)} \end{aligned}\right\} \tag{49e}$$

setzen kann; J bedeutet die Besselsche, N die Neumannsche Funktion; $H^{(1)}$ und $H^{(2)}$ sind die beiden Hankelschen Funktionen; den Ordnungszeiger α haben wir der Kürze wegen weggelassen.

Für die Gl. (49a) wird

$$\alpha = \frac{r+1}{r+s+2} \tag{49f}$$

für die Gl. (49b) ist

$$\bar{\alpha} = \frac{s+1}{r+s+2} = 1-\alpha, \tag{49g}$$

folglich wird

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \eta^\alpha X_\alpha\left(\frac{m\eta}{\sqrt{L_0 C_0}}\right) \\ \psi &= \eta^{1-\alpha} X_{1-\alpha}\left(\frac{m\eta}{\sqrt{L_0 C_0}}\right). \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Die weitere Berechnung vollzieht sich ebenso wie in dem Sonderfall der Besselschen Leitung (Abschnitt 6 bis 8), wo $r=1$; $s=-1$, $\alpha=1$, $\bar{\alpha}=0$ wird. Ihre praktische Durchführbarkeit hängt davon ab, ob Tafeln der Zylinderfunktionen für die

[1]) Jahnke-Emde, Funktionentafeln, 1. Aufl., S. 166; 2. Aufl., S. 214. Leipzig: B. G. Teubner. Wir haben hier die allgemeine Zylinderfunktion mit X bezeichnet, da wir den sonst gebräuchlichen Buchstaben Z bereits vergeben haben.

gegebene Ordnungszahl α vorhanden sind; manchmal kann man sich auch mit den Näherungswerten der Zylinderfunktionen für großes Argument begnügen, wie in dem Beispiel im Abschnitt 8 gezeigt worden ist.

Wir erwähnen noch den Sonderfall $r = s$.

Hier wird der Wellenwiderstand Z von x (und η) unabhängig; daher verschwindet das mittlere Glied in den Differentialgleichungen (49a), (49b); die Normalfunktionen erhalten die einfache Form

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\eta) &= a\cos\frac{m}{\sqrt{L_0 C_0}}\eta + b\sin\frac{m}{\sqrt{L_0 C_0}}\eta \\ \psi(\eta) &= \frac{m}{L_0}\left(a\sin\frac{m}{\sqrt{L_0 C_0}}\eta - b\cos\frac{m}{\sqrt{L_0 C_0}}\eta\right), \end{aligned}\right\} \tag{50a}$$

$$\eta = \frac{\sqrt{L_0 C_0}}{\lambda(r+1)}(1+\lambda x)^{r+1}. \tag{50b}$$

Man erhält diese Lösung auch aus den allgemeinen Formeln (50); mit $\alpha = \frac{1}{2}$, $1-\alpha = \frac{1}{2}$ lassen sich die Zylinderfunktionen durch trigonometrische Funktionen ausdrücken.

Der wesentliche Unterschied der Lösung nach Gl. (50a) gegenüber der für eine gleichförmige Leitung geltenden besteht in der Veränderung des Ortsmaßstabes, gemäß Gl. (50b). Mit $r = 0$ geht unsere Potenzleitung in die gleichförmige Leitung über.

b) Exponentialleitungen

Für die Exponentialleitung [Gl. (43)] wird

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x} = \sqrt{L_0 C_0}\,\mathrm{e}^{\frac{\beta+\gamma}{2}x},$$

mithin:

$$\eta = \eta_0\,\mathrm{e}^{\frac{\beta+\gamma}{2}x}, \qquad \eta_0 = \frac{2\sqrt{L_0 C_0}}{\beta+\gamma}. \tag{51a}$$

Ferner

$$Z = Z_0\,\mathrm{e}^{\frac{\beta-\gamma}{2}x}, \qquad Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}. \tag{51b}$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln Z}{\mathrm{d}\eta} = \frac{\beta-\gamma}{2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\eta} = \frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}\cdot\frac{1}{\eta}.$$

Setzt man diesen Wert in die Gl. (46a) bzw. (46b) ein, so nehmen diese die Form (49c) an, wobei in der Differentialgleichung für φ der Wert

$$\alpha = \frac{\gamma}{\beta+\gamma}, \tag{51c}$$

in der Differentialgleichung für ψ der Wert

$$\overline{\alpha} = \frac{\beta}{\beta+\gamma} = 1-\alpha \tag{51d}$$

einzusetzen ist. Hiermit gilt dann wieder die Lösung nach Gl. (50), mit η nach Gl. (51a).

Der Sonderfall $\gamma = -\beta$ verdient besondere Beachtung. Hier wird die Wellengeschwindigkeit

$$w = \frac{1}{\sqrt{L\,C}} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \tag{52a}$$

von x unabhängig; wir haben es also mit der Exponentialleitung mit konstanter Wellengeschwindigkeit zu tun. Der Wellenwiderstand folgt der Exponentialfunktion

$$Z = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \cdot e^{\beta x}. \tag{52b}$$

Die allgemeine Lösung nach Gl. (50) ist in unserem Fall nicht brauchbar, da mit $\gamma = -\beta$ sowohl η_0, als auch $\alpha = \infty$ wird. Die Lösung für unseren Sonderfall ergibt sich jedoch unmittelbar wie folgt:

Aus

$$\frac{d\eta}{dx} = \sqrt{L_0 C_0} \tag{52c}$$

folgt

$$\eta = \sqrt{L_0 C_0} \cdot x. \tag{52d}$$

Ferner erhält man aus (52b)

$$\frac{d \ln Z}{d\eta} = \beta \frac{dx}{d\eta} = \frac{\beta}{\sqrt{L_0 C_0}}.$$

Dies in Gl. (46a) eingesetzt, ergibt

$$\frac{d^2\varphi}{d\eta^2} - \frac{\beta}{\sqrt{L_0 C_0}} \frac{d\varphi}{d\eta} + \frac{m^2}{L_0 C_0} \varphi = 0,$$

oder, auf die Veränderliche x umgerechnet,

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \beta \frac{d\varphi}{dx} + m^2 \varphi = 0. \tag{52e}$$

Mit dem Ansatz

$$\varphi = e^{qx}$$

ergibt sich

$$q^2 - q\beta + m^2 = 0.$$

Diese Gleichung hat die beiden Wurzeln

$$\left.\begin{aligned} q_{1,2} &= \frac{\beta}{2} \mp \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - m^2} = \frac{\beta}{2} \mp \delta \\ \delta &= \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - m^2}. \end{aligned}\right\} \tag{52f}$$

Demnach lautet die allgemeine Lösung von (52e)

$$\varphi(x) = c_1 e^{\left(\frac{\beta}{2} - \delta\right)x} + c_2 e^{\left(\frac{\beta}{2} + \delta\right)x} \tag{52g}$$

Die Normalfunktion des Stromes ergibt sich aus [s. Gl. (3)]

$$\psi(x) = -\frac{\varphi'(x)}{L} = -\frac{1}{L_0} e^{-\beta x} \varphi'(x)$$

zu

$$\psi(x) = \frac{c_1}{L_0}\left(\delta - \frac{\beta}{2}\right) e^{\left(-\frac{\beta}{2} - \delta\right)x} - \frac{c_2}{L_0}\left(\delta + \frac{\beta}{2}\right) e^{\left(-\frac{\beta}{2} + \delta\right)x}. \tag{52h}$$

Wir betrachten erzwungene Schwingungen der Kreisfrequenz ω und sehen von Verlusten auf der Leitung ab. Es wird also $p = i\omega$; $\varrho_1 = \varrho_2 = 0$ und hiermit nach Gl. (45)

$$m = \omega \sqrt{L_0 C_0}. \tag{52i}$$

Mit $e^{pt} = e^{i\omega t}$ können wir die Gl. (3) als Ausdrücke für die Speere (die Wechselstromvektoren) der Spannung $\mathfrak{V}_x$ und des Stromes $\mathfrak{I}_x$ auf der Leitung auffassen; wir schreiben demgemäß, mit Beachtung von Gl. (52g), (52h),

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{V}_x &= i\omega \left[c_1 e^{\left(\frac{\beta}{2} - \delta\right)x} + c_2 e^{\left(\frac{\beta}{2} + \delta\right)x}\right] \\ \mathfrak{I}_x &= \frac{c_1}{L_0}\left(\delta - \frac{\beta}{2}\right) e^{\left(-\frac{\beta}{2} - \delta\right)x} - \frac{c_2}{L_0}\left(\delta + \frac{\beta}{2}\right) e^{\left(-\frac{\beta}{2} + \delta\right)x}. \end{aligned}\right\} \tag{53a}$$

Die Festwerte c_1 und c_2 drückt man zweckmäßig durch die Spannung $\mathfrak{V}_l$ und den Strom $\mathfrak{I}_l$ am Ende der Leitung, $x = l$, aus. Wir schreiben die Gl. (53a) für $x = l$ an und rechnen c_1 und c_2 aus:

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \frac{e^{\delta l}}{2 i \omega \delta}\left[\left(\delta + \frac{\beta}{2}\right) e^{-\frac{\beta l}{2}} \mathfrak{V}_l + i \omega L_0 e^{\frac{\beta l}{2}} \mathfrak{I}_l\right] \\ c_2 &= \frac{e^{-\delta l}}{2 i \omega \delta}\left[\left(\delta - \frac{\beta}{2}\right) e^{-\frac{\beta l}{2}} \mathfrak{V}_l - i \omega L_0 e^{\frac{\beta l}{2}} \mathfrak{I}_l\right]. \end{aligned}\right\} \tag{53b}$$

Auf der Exponentialleitung findet eine mit x zunehmende Spannungsübersetzung statt, die durch den Faktor $e^{\beta x/2}$ in der ersten Gl. (53a) ausgedrückt wird. Gleichzeitig hat man eine Stromübersetzung im umgekehrten Sinne, entsprechend dem Faktor $e^{-\beta x/2}$ in der zweiten Gl. (53a). Die Größe δ entspricht der Fortpflanzungskonstante $i\eta$ auf der homogenen Leitung, die bei verschwindenden Verlusten rein imaginär ist und den Wert $i\omega\sqrt{LC}$ hat. In unserem Falle ist

$$\delta = \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \omega^2 L_0 C_0}$$

für kleine Frequenzen reell, für hohe Frequenzen imaginär. Die Grenzfrequenz

$$\omega_0 = \frac{\beta}{2\sqrt{L_0 C_0}} \tag{54}$$

trennt das Gebiet verschwindender Dämpfung ($\omega > \omega_0$) von dem Gebiet endlicher, mit dem Abstand von ω_0 zunehmender Dämpfung ($\omega < \omega_0$). Die Exponentialleitung hat mithin die Eigenschaft eines Hochpaßfilters; diese Eigenschaft ist, wie bereits erwähnt, verbunden mit der Eigenschaft eines Transformators mit dem Übersetzungsverhältnis $e^{\frac{1}{2}\beta x}$ für die Spannung.

Schreibt man die Gl. (53a) für $x = 0$ an und setzt die Werte von c_1 und c_2 nach Gl. (53b) ein, so erhält man die Vierpolgleichungen der Exponentialleitung in der Form

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{V}_0 &= \mathfrak{A}\,\mathfrak{V}_l + \mathfrak{B}\,\mathfrak{I}_l \\ \mathfrak{I}_0 &= \mathfrak{C}\,\mathfrak{V}_l + \mathfrak{D}\,\mathfrak{I}_l \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A} &= e^{-\frac{\beta l}{2}}\left[\mathfrak{Cof}\,\delta l + \frac{\beta}{2\delta}\,\mathfrak{Sin}\,\delta l\right] \\ \mathfrak{B} &= e^{+\frac{\beta l}{2}}\left[\frac{i\omega L_0}{\delta}\,\mathfrak{Sin}\,\delta l\right] \\ \mathfrak{C} &= e^{-\frac{\beta l}{2}}\left[\frac{i\omega C_0}{\delta}\,\mathfrak{Sin}\,\delta l\right. \\ \mathfrak{D} &= e^{+\frac{\beta l}{2}}\left[\mathfrak{Cof}\,\delta l - \frac{\beta}{2\delta}\,\mathfrak{Sin}\,\delta l\right]. \end{aligned}\right\} \tag{55a}$$

Für Frequenzen oberhalb ω_0, wo δ imaginär wird, setzt man in den Ausdrücken (55a) zweckmäßig $\delta = i\vartheta$ und hiermit

$$\mathfrak{Cof}\,\delta l = \cos\vartheta l, \qquad \frac{\mathfrak{Sin}\,\delta l}{\delta} = \frac{\sin\vartheta l}{\vartheta}. \tag{55b}$$

Man überzeugt sich leicht, daß die Werte nach Gl. (55a) die bekannte Beziehung

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\,\mathfrak{C} = 1$$

erfüllen, womit eine Nachprüfung unerer Rechnung gegeben ist.

In den Gl. (53a) bedeutet das erste Glied eine in Richtung positiver x fortschreitende Welle, das zweite die gegenläufige Welle. Aus der zweiten Gl. (53b) folgt,

daß $c_2 = 0$ wird und hiermit die gegenläufige Welle verschwindet, wenn der Scheinwiderstand $\mathfrak{R}$ der Belastung am Leitungsende $x = l$ den Wert

$$\mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{B}_l}{\mathfrak{J}_l} = \frac{i\omega L_0 e^{\beta l}}{\delta - \frac{\beta}{2}} = \frac{1}{i\omega C_0} e^{\beta l}\left[\sqrt{\frac{\beta^2}{4} - m^2} + \frac{\beta}{2}\right]$$

oder

$$\mathfrak{R} = Z_0 e^{\beta l}\frac{1}{\nu}[\sqrt{\nu^2 - 1} - i], \quad \text{mit} \quad \nu = \frac{\omega}{\omega_0}$$

hat.

Die Exponentialleitung mit konstanter Wellengeschwindigkeit hat in der Hochfrequenztechnik praktische Anwendung gefunden[1]).

Die hier entwickelten Formeln lassen sich auf analoge mechanische Anordnungen übertragen, z. B. auf die Luftbewegung und Schwingungen in Röhren mit exponentiell wachsendem Querschnitt, wie beim Lautsprecher mit Exponentialtrichter, oder mit einem Trichter, der sich nach irgendeinem Potenzgesetz erweitert.

Zusammenfassung

In dem ersten Teil dieser Arbeit wird die Theorie elektrischer Leitungen entwickelt, deren Induktivität und Kapazität in beliebiger Weise räumlich veränderlich sind. Der Einfluß der Verluste durch Widerstand und Ableitung wird näherungsweise berücksichtigt.

Bezüglich der Grenzbedingungen wird für den allgemeinsten Fall angenommen, daß die Leitung an beiden Enden mit beliebig vermaschten elektrischen Netzen verbunden ist; jede Masche enthält Widerstand, Induktivität und Kapazität und ist mit allen übrigen Maschen ohmisch, induktiv und kapazitiv gekoppelt. In diesem allgemeinen Fall sind alle einfachen Sonderfälle mit enthalten, z. B. offenes Leitungsende, kurzgeschlossenes Leitungsende, Abschluß durch ohmschen Widerstand, Kapazität oder Induktivität, oder durch eine Reihenschaltung oder eine Parallelschaltung dieser Elemente.

Mit dem Ansatz e^{pt} für die zeitliche Abhängigkeit gewinnt man für $p = i\omega$ den eingeschwungenen Zustand für Wechselspannung bzw. Wechselstrom der Kreisfrequenz ω (erzwungene Schwingungen und Wellen).

Derselbe Ansatz ergibt bei Abwesenheit einer äußeren EMK die freien Schwingungen des aus der Leitung mit ihren Endnetzen bestehenden Systems. Differentialgleichung und Grenzbedingungen bestimmen die Eigenwerte p und mit ihren die Normalfunktionen. Diese ergeben für jede Eigenschwingung die räumliche Verteilung von Spannung und Strom auf der Leitung und in den angeschlossenen Netzen, und zwar bis auf einen Größenfaktor, den man die Amplitude eines solchen Normalvorganges nennt.

Die Hauptaufgabe, die für jeden Ausgleichsvorgang zu lösen ist, besteht in der Berechnung der Amplituden der Normalvorgänge, aus denen sich der Ausgleichsvorgang zusammensetzt. Diese mathematisch oft außerordentlich schwierige Aufgabe wird mittels des Satzes von der wechselseitigen Energie gelöst. Man bildet für den auf der Leitung und in den angeschlossenen Netzen beliebig gegebenen Anfangszustand und für einen bestimmten, z. B. den k-ten Normalvorgang, die wechselseitige elektrische Energie und die wechselseitige magnetische Energie; ihre Differenz, dividiert durch die doppelte Differenz der elektrischen und der magnetischen Energie des k-ten Normalvorganges ergibt die gesuchte Amplitude dieses Normalvorganges.

[1]) Siehe die in den Fußnoten 5 und 6, S. 69 genannten Arbeiten von Ch. R. Burrows und H. A. Wheeler.

Auf der Leitung stellen sich die Energien als Integrale dar, die über die ganze Länge der Leitung zu berechnen sind. Mittels der Differentialgleichungen der Normalfunktionen werden Formeln abgeleitet, die diese Integrale durch die Funktionswerte an den Leitungsenden ausdrücken und dadurch die Integration ersparen. Für die angeschlossenen Leitungsnetze lassen sich die wechselseitigen Energien durch Matrizen übersichtlich ausdrücken; ebenso die Energien selbst.

Im zweiten Teil der Arbeit wird die vorstehend skizzierte Theorie zur Berechnung der erzwungenen Schwingungen und Wellen, sowie des Einschaltvorganges auf der sogenannten Besselschen Leitung benutzt. Die Berechnung wird an einem Beispiel zahlenmäßig durchgeführt; die Ergebnisse werden durch Kurven erläutert.

Anschließend werden die Potenzleitungen behandelt, bei denen die räumliche Änderung der Induktivität und der Kapazität durch Potenzen mit beliebigen ganzen oder unganzen, positiven oder negativen Exponenten dargestellt wird.

Ein Grenzfall der Potenzleitungen sind die Exponentialleitungen mit exponentieller Änderung der Kapazität und Induktivität. Ihre Theorie läßt sich im allgemeinen auf die Theorie der Potenzleitungen zurückführen. Nur der Sonderfall der Exponentialleitung mit konstanter Wellengeschwindigkeit erfordert besondere Betrachtungen, da sich die für den allgemeinen Fall geltenden Formeln auf ihn nicht anwenden lassen. Die für den Sonderfall gefundenen Ergebnisse — Wirkung der Leitung als Hochpaß mit Spannungsübersetzung — beschreiben auch das Verhalten eines Lautsprechers mit Exponentialtrichter.

Ganz allgemein läßt sich die Theorie der ungleichförmigen elektrischen Leitungen auf analoge mechanische Anordnungen vollständig übertragen; z. B. auf die Luftbewegung und Schwingungen in Röhren von veränderlicher Weite, auf die Drehschwingungen elastischer Wellen mit veränderlichem Querschnitt, auf die Längsschwingungen ungleichförmiger Stäbe, und ähnliche Gebilde.